# Régression polynomiale par morceaux sous contrainte de régularité pour la propagation de fissures

Florine Greciet[1], Romain Azaïs[2] & Anne Gégout-Petit[3]

[1] *Université de Lorraine, CNRS, Inria, IECL, F-54000 Nancy, France et Safran Aircraft Engines, florine.greciet@gmail.com*
[2] *Laboratoire Reproduction et Développement des Plantes, Univ Lyon, ENS de Lyon, UCB Lyon 1, CNRS, INRA, Inria, F-69342, Lyon, France, romain.azais@inria.fr*
[3] *Université de Lorraine, CNRS, Inria, IECL, F-54000 Nancy, France, anne.gegout-petit@univ-lorraine.fr*

**Résumé.** Dans ce papier, nous nous intéressons à des vitesses de propagation de fissures, phénomène physique continu et laissant observer plusieurs régimes. Dans ce but, nous proposons un modèle de régression polynomiale par morceaux à plusieurs régimes sous des hypothèses de continuité et/ou de dérivabilité ainsi qu'une méthode d'inférence permettant d'estimer les instants de transition et les lois de chaque régime. La plus efficace de nos méthodes d'inférence est basée sur un algorithme de programmation dynamique. Pour introduire la méthodologie, nous présentons d'abord le problème lorsque le nombre de régimes est 2 puis nous généralisons à un nombre quelconque de régimes.

**Mots-clés.** Modèle de régression polynomiale par morceaux, programmation dynamique, détection de rupture, vitesse de propagation de fissures.

**Abstract.** In this paper, we focus on crack propagation rate, continuous physical phenomenon that presents several regimes. To this aim, we propose a piecewise polynomial regression model under continuity and/or derivability assumptions as well as a statistical inference method to estimate the transition times and the parameters of each regime. The most efficient algorithm relies on dynamic programming. First, we introduce the problem when the number of regimes is 2, then we generalize the procedure to any number of regimes.

**Keywords.** Piecewise polynomial regression model, dynamic programming, rupture detection, crack growth rate.

## 1 Introduction

En aéronautique, la commercialisation des pièces de moteur nécessite la caractérisation des propriétés de durée de vie de chaque pièce. Ces propriétés sont propres au matériau utilisé. Parmi ces propriétés on trouve la propagation de fissures dont les durées de vie associées sont calculées à partir de lois décrivant la vitesse d'avancée de la fissure dans le matériau en fonction de la contrainte appliquée. L'étude empirique des courbes de vitesse de propagation de fissures montre l'existence de trois régimes correspondant chacun à une phase particulière de propagation (amorçage, propagation lente, rupture). Cependant, en pratique, les données d'essais ne permettent pas toujours d'observer cette allure de courbe. En effet, selon le matériau testé lors de l'essai, il est possible d'observer plus de trois régimes. De plus, ces données présentent une grande variabilité qui complexifie grandement la détection des instants de transition entre les régimes et donc la modélisation des données présentes dans les différents régimes.

Afin d'améliorer les calculs de durées de vie, nous proposons, en nous inspirant des travaux de Chamroukhi et al. (2009), un modèle de régression polynomiale par morceaux pour décrire le phénomène de propagation. Ces modèles appartiennent à la famille des processus de Markov déterministes par morceaux et sont bien adaptés au phénomène de propagation de fissures puisqu'ils permettent de prendre en compte l'existence de plusieurs régimes de propagation (voir Azaïs et al. (2018) et Chiquet (2007)). Les données étudiées étant issues d'un phénomène physique continu, nous intégrons cette information en ajoutant des hypothèses de régularité à notre modèle.

Les sections suivantes présenteront le modèle ainsi que les méthodes d'inférence proposées pour un modèle à deux régimes puis pour un modèle où le nombre de régimes est quelconque.

# 2 Modèle de régression polynomiale par morceaux

On considère le modèle de régression polynomiale par morceaux suivant :

$$Y_i = \sum_{k=1}^{K} \left(\rho_k(X_i) + \epsilon_i {\sigma_k}^2\right) \mathbb{1}_{[\tau_{k-1},\tau_k[}(X_i),$$

avec

- $\epsilon_i \sigma_k^2$ le terme d'erreur. Les $\epsilon_i$ sont indépendants et identiquement distribués tels que $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ ;
- $K$ le nombre de régimes ;
- $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ les instants de mesures, $X_i \in [\tau_0, \tau_K]$ avec $\tau_0$ et $\tau_K$ fixés et connus ;
- $(\tau_k)_{1\leq k\leq K-1}$ les $K-1$ instants de transitions ;
- $(\rho_k)_{1\leq k\leq K}$ les polynômes (de degré fixé) qui décrivent les $K$ régimes.

Ce modèle est hétéroscédastique c'est-à-dire que la variance du bruit est constante dans chaque régime mais qu'elle est autorisée à varier d'un régime à l'autre.

Les données que nous étudions étant issues d'un phénomène physique continu, nous ajoutons une hypothèse de régularité à la fonction de lien entre $X$ et $Y$. Cette hypothèse peut porter sur la continuité de la fonction de lien $\mathcal{A}_c$ ou sur sa dérivabilité $\mathcal{A}_d$.

$\mathcal{A}_c(\tau_K)$ : la fonction de lien entre $X$ et $Y$ est continue sur l'intervalle $[\tau_0, \tau_K]$, c'est-à-dire,

$$\forall\, 1 \leq k \leq K,\ \ \rho_{k-1}(\tau_{k-1}) = \rho_k(\tau_{k-1}).$$

$\mathcal{A}_d(\tau_K)$ : la fonction de lien entre $X$ et $Y$ est continûment dérivable sur l'intervalle $[\tau_0, \tau_K]$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_c(\tau_K)$ est vraie et,

$$\forall\, 1 \leq k \leq K,\ \ \dot{\rho}_{k-1}(\tau_{k-1}) = \dot{\rho}_k(\tau_{k-1}).$$

Dans la suite, nous notons $\alpha_k$ le vecteur des coefficients du polynôme $\rho_k$. De plus, $\mathbf{A}_I$ désigne le vecteur $(A_i)_{1\leq i\leq I}$. Notre objectif est d'estimer les paramètres du modèle, c'est-à-dire $\boldsymbol{\alpha}_K$, $\boldsymbol{\tau}_{K-1}$ et $\boldsymbol{\sigma}^2_K$. Dans ce cadre paramétrique, la vraisemblance du modèle s'écrit (à une constante additive près),

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}_K, \boldsymbol{T}_{K-1}, \boldsymbol{S}^2_K) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left[\log(S_k^2) + \frac{\big(Y_i - p_k(X_i)\big)^2}{S_k^2}\right]\mathbb{1}_{[T_{k-1},T_k[}(X_i), \tag{1}$$

où $p_k$ est le polynôme dont les coefficients sont donnés par $a_k$.

# 3 Estimation pour deux régimes

Dans cette partie, nous supposons $K = 2$. Notre objectif est d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\tau_1$ et $\boldsymbol{\sigma}^2_2$ par maximum de vraisemblance sous l'hypothèse $\mathcal{A}_*(\tau_2)$, $* \in \{c, d\}$. Le problème de maximisation de la vraisemblance se décompose ainsi,

$$\max_{\substack{\boldsymbol{a}_2, T_1, \boldsymbol{S}^2_2 \\ \text{sous } \mathcal{A}_*(\tau_2)}} \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_2, T_1, \boldsymbol{S}^2_2) = \max_{T_1} \max_{\substack{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{S}^2_2 \\ \text{sous } \mathcal{A}_*(\tau_2)}} \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_2, T_1, \boldsymbol{S}^2_2).$$

À $T_1$ fixé, le sous-problème d'optimisation sur $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{S}^2_2$ est le seul faisant intervenir la contrainte $\mathcal{A}_*(\tau_2)$. Celle-ci s'écrit $q(\boldsymbol{a}_2) = p_1(T_1) - p_2(T_1) = 0$ lorsque $* = c$ et

$$q(\boldsymbol{a}_2) = \begin{pmatrix} p_1(T_1) - p_2(T_1) \\ \dot{p}_1(T_1) - \dot{p}_2(T_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

lorsque $* = d$. Dans les deux cas, nous montrons par la méthode des multiplicateurs de Lagrange que le maximum sous contrainte vérifie une équation linéaire en $\boldsymbol{a}_2$ de la forme

$$M(\boldsymbol{S}^2_2)\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \\ \mu \end{pmatrix} = \gamma,$$

où $\mu$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. Par conséquent, à $\boldsymbol{S}^2_2$ fixé, l'argument maximum sous contrainte $\boldsymbol{a}_2$ s'obtient en inversant la matrice $M(\boldsymbol{S}^2_2)$. Mais lorsque $\boldsymbol{a}_2$ est fixé, l'argument maximum $\boldsymbol{S}_2^2$ est donné par la formule classique de l'estimateur empirique de la variance $\widehat{S}_{\boldsymbol{a}_2}$. Ceci nous permet de définir un algorithme de point fixe d'approximation de l'optimum sous contrainte,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\boldsymbol{a}_2^{(i+1)}, \mu^{(i+1)})^T & = & M(\boldsymbol{S}_2^{2(i)})^{-1}\gamma, \\ \boldsymbol{S}_2^{2(i+1)} & = & \widehat{S}_{\boldsymbol{a}_2^{(i+1)}}. \end{array} \right.$$

L'optimisation en $T_1$ est traitée par une recherche trichotomique, mais pourrait être résolue numériquement par d'autres méthodes (algorithme de Nelder-Mead par exemple).

# 4 Estimation pour un nombre quelconque de régimes

## 4.1 Généralisation de la méthode à 2 régimes

Nous proposons d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\alpha}_K$, $\boldsymbol{\tau}_{K-1}$ et $\boldsymbol{\sigma}_K^2$ en maximisant la log-vraisemblance (1) sous l'hypothèse $\mathcal{A}_*(\tau_K)$ avec $* \in \{c, d\}$ lorsque le nombre de régimes $K$ est quelconque. Comme précédemment, le problème de maximisation de la vraisemblance peut être décomposé en deux sous-problèmes. À instants de transition $\boldsymbol{T}_{K-1}$ fixés a priori, nous pouvons résoudre la seconde partie du problème de maximisation comme précédemment (méthode des multiplicateurs de Lagrange associée à un algorithme de point fixe),

$$\max_{\substack{\boldsymbol{a}_K, \boldsymbol{S}_K^2 \\ \text{sous } \mathcal{A}_*(\tau_K)}} \mathcal{L}(\boldsymbol{a}_K, \boldsymbol{T}_{K-1}, \boldsymbol{S}_K^2).$$

Il reste alors un problème d'optimisation de dimension $K-1$ sous contrainte d'inégalités, $T_1 < T_2 < \cdots < T_{K-1}$, qui peut par exemple être résolu par une recherche exhaustive sur la grille des instants de mesure. Cette méthode a deux inconvénients majeurs : (i) la taille de la matrice à inverser pour résoudre le premier problème d'estimation est linéaire en le nombre de régimes, et (ii) cette inversion doit être réalisée à chaque appel de la vraisemblance à maximiser en les $K-1$ instants de saut. La complexité de cet algorithme est donc rédhibitoire.

## 4.2 Programmation dynamique

Nous proposons maintenant une méthode inspirée de l'article de Bellman (1952), qui utilise une approche par programmation dynamique pour étudier un jeu de données linéaire par morceaux. La stratégie de programmation dynamique appliquée à notre problème consiste à décomposer la log-vraisemblance (1) en la log-vraisemblance à droite (de $T_{K-1}$) $\mathcal{L}^r$ et la log-vraisemblance à gauche (de $T_{K-1}$) $\mathcal{L}^l$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}_{[\tau_0,\tau_K]}(\boldsymbol{a}_K, \boldsymbol{T}_{K-1}, \boldsymbol{S}_K^2) & = & \mathcal{L}^l_{[\tau_0,T_{K-1}[}(\boldsymbol{a}_{K-1}, \boldsymbol{T}_{K-2}, \boldsymbol{S}_{K-1}^2) \\ & + & \mathcal{L}^r_{[T_{K-1},\tau_K]}(a_K, T_{K-1}, S_K^2). \end{array}$$

Nous souhaitons maximiser la log-vraisemblance sous contrainte de continuité $\mathcal{A}_c(\tau_K)$. Sous celle-ci, les vraisemblances à gauche et à droite sont liées, ce qui nous empêche de séparer le problème d'optimisation en deux sous-problèmes. Dans ce but, nous introduisons une variable $\beta$ correspondant à la valeur prise par la fonction de lien en le temps de saut $T_{K-1}$. Pour diminuer la dimension du problème d'optimisation ainsi obtenu, on peut estimer $\beta$ de manière non-paramétrique,

$$
\begin{aligned}
\max_{\substack{\boldsymbol{a}_K,\boldsymbol{T}_{K-1},\boldsymbol{S}_K^2\\ \text{sous } \mathcal{A}_c(\tau_K)}} \mathcal{L}_{[\tau_0,\tau_K]}(\boldsymbol{a}_K,\boldsymbol{T}_{K-1},\boldsymbol{S}_K^2) &= \max_{\beta} \max_{\substack{\boldsymbol{a}_{K-1},\boldsymbol{T}_{K-2},\boldsymbol{S}_{K-1}^2\\ \text{sous } \mathcal{A}_c(T_{K-1})\\ \text{et } p_{K-1}(T_{K-1})=\beta}} \mathcal{L}^l_{[\tau_0,T_{K-1}[}(\boldsymbol{a}_{K-1},\boldsymbol{T}_{K-2},\boldsymbol{S}_{K-1}^2)\\
&+ \max_{\substack{a_K,T_{K-1},S_K^2\\ \text{sous } p_K(T_{K-1})=\beta}} \mathcal{L}^r_{[T_{K-1},\tau_K]}(a_K,T_{K-1},S_K^2)\\
&\simeq \max_{\substack{\boldsymbol{a}_{K-1},\boldsymbol{T}_{K-2},\boldsymbol{S}_{K-1}^2\\ \text{sous } \mathcal{A}_c(T_{K-1})\\ \text{et } p_{K-1}(T_{K-1})=\widehat{g}(T_{K-1})}} \mathcal{L}^l_{[\tau_0,T_{K-1}[}(\boldsymbol{a}_{K-1},\boldsymbol{T}_{K-2},\boldsymbol{S}_{K-1}^2)\\
&+ \max_{\substack{a_K,T_{K-1},S_K^2\\ \text{sous } p_K(T_{K-1})=\widehat{g}(T_{K-1})}} \mathcal{L}^r_{[T_{K-1},\tau_K]}(a_K,T_{K-1},S_K^2),
\end{aligned}
$$

où $\widehat{g}$ désigne un estimateur non-paramétrique (estimateur de Parzen-Rosenblatt par exemple) de la fonction de lien. L'application récursive de cette décomposition montre que le problème d'optimisation peut être résolu en maximisant indépendamment les log-vraisem blances de chaque régime, ce qui réduit considérablement la complexité de l'algorithme d'optimisation. Ceci peut être fait comme précédemment en associant la méthode des multiplicateurs de Lagrange à un algorithme de point fixe.

# Bibliographie


Ambriz, R. R., & Jaramillo, D. (2014). Mechanical behavior of precipitation hardened aluminum alloys welds. In Light Metal Alloys Applications. InTech.

Azaïs, R., Gégout-Petit, A., & Greciet, F. (2018). Rupture Detection in Fatigue Crack Propagation. Statistical Inference for Piecewise-deterministic Markov Processes, 173-207.

Bellman, R. (1952). On the theory of dynamic programming. Proceedings of the National Academy of Sciences, 38(8), 716-719.

Chamroukhi, F., Samé, A., Govaert, G., & Aknin, P. (2009). Time series modeling by a regression approach based on a latent process. Neural Networks, 22(5-6), 593-602.

Chiquet, J. (2007). Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures (Doctoral dissertation, Université de Technologie de Compiègne).