

DETECTING THE DIRECTION OF HIGH-DIMENSIONAL SPHERICAL SIGNALS

Davy Paindaveine & Thomas Verdebout

Université libre de Bruxelles (ULB)

Abstract. We consider one of the most important problems in directional statistics, namely the spherical location testing problem, whose null is that the modal location $\boldsymbol{\theta}$ of a Fisher–von Mises–Langevin (FvML) distribution on the p -dimensional unit sphere $\mathcal{S}^{p-1}$ coincides with a given location $\boldsymbol{\theta}_0$. The underlying concentration parameter κ plays the role of a nuisance. We derive local asymptotic normality (LAN) results in a general high-dimensional framework where the dimension $p = p_n$ goes to infinity, at an arbitrary rate, with the sample size n , and where the concentration κ_n behaves in a completely free way with n , which offers a spectrum of problems ranging from arbitrarily easy to arbitrarily challenging ones. We identify seven asymptotic regimes, depending on the convergence/divergence properties of (κ_n) , that yield different limiting experiments and different contiguity rates. In each regime, we derive Le Cam optimal tests and we compute, from the Le Cam third lemma, asymptotic powers of the classical Watson test under contiguous alternatives. To obtain a full understanding of the non-null behavior of this test, we derive its local asymptotic powers in the broader, semiparametric, model of rotationally symmetric distributions. Monte Carlo studies show that finite-sample behaviours remarkably agree with our asymptotic results.

Keywords. Le Cam theory, Asymptotic power, Directional Statistics, spherical location.

Résumé. Nous considérons un des plus importants problèmes en statistique directionnelle qui consiste en tester que la position modale $\boldsymbol{\theta}$ d’une distribution de Fisher–von Mises–Langevin (FvML) sur l’hypersphère unité $\mathcal{S}^{p-1}$ de dimension p coïncide avec une position donnée $\boldsymbol{\theta}_0$. Le paramètre de concentration κ joue le rôle de paramètre de nuisance. Nous obtenons des résultats de normalité locale asymptotique (LAN) en grande dimension en laissant $p = p_n$ diverger vers l’infini à vitesse arbitraire avec la taille d’échantillon n et où la concentration κ_n se comporte de façon libre avec n , ce qui offre un spectre important de problèmes de l’arbitrairement simple à l’arbitrairement compliqué. Nous identifions sept régimes asymptotiques qui dépendent des propriétés de convergence/divergence de (κ_n) ce qui conduit à des taux de contiguïté et des expériences limites différents. Dans chaque régime, nous obtenons les tests de Le Cam optimaux et calculons à l’aide du troisième Lemme de Le Cam les puissances asymptotiques du test de Watson classique sous des contre-hypothèses contigües. Afin d’obtenir une plus grande compréhension du comportement de ce test, nous obtenons ses puissances locales dans un modèle semiparamétrique contenant des distributions à symétrie rotationnelle. Une étude Monte-Carlo montre que

les comportements empiriques sont remarquablement en accord avec les résultats asymptotiques.

Mots clés. Théorie de Le Cam, Puissance asymptotique, Statistique directionnelle, position sphérique.

Bibliographie

Paindaveine, D. and Verdebout, Th. (2017). Inference on the mode of weak directional signals: a Le Cam perspective on hypothesis testing near singularities, *Annals of Statistics* 45, pp. 800-832.

Paindaveine, D. and Verdebout, Th. (2019). Detecting the direction of a signal on high-dimensional spheres: non-null and Le Cam optimality results, *submitted*.