

INFÉRENCE SUR LA POSITION SPHÉRIQUE DANS DES SITUATIONS DE GRANDE CONCENTRATION

Davy Paindaveine¹ & Thomas Verdebout²

¹ *Université libre de Bruxelles, ECARES and Département de Mathématique, Avenue F.D. Roosevelt, 50, ECARES, CP114/04 B-1050, Bruxelles, Belgique, dpaindav@ulb.ac.be*

² *Université libre de Bruxelles, ECARES and Département de Mathématique, Boulevard du Triomphe, CP210, B-1050, Bruxelles, Belgique, tverdebo@ulb.ac.be*

Résumé. Motivé par le fait que les données circulaires ou sphériques sont souvent très concentrées autour d'une position θ , nous considérons l'inférence sur θ dans des régimes asymptotiques de grande concentration sous lesquels la probabilité de toute calotte sphérique centrée à θ converge vers un lorsque la taille d'échantillon n diverge vers l'infini. Plutôt que de nous restreindre aux distributions de Fisher-von Mises-Langevin, nous considérons une classe semiparamétrique beaucoup plus large de distributions à symétrie rotationnelle indiquée par un paramètre de position θ , un paramètre scalaire de concentration κ et une nuisance fonctionnelle f . Nous déterminons la classe des distributions pour laquelle le phénomène de grande concentration décrit ci-dessus se matérialise lorsque κ diverge vers l'infini. Pour de telles distributions, nous considérons alors l'inférence (estimation ponctuelle, estimation par zone de confiance, tests d'hypothèses) sur θ dans des scénarios asymptotiques où κ_n diverge vers l'infini à une vitesse arbitraire avec n . Notre étude asymptotique révèle que, de façon intéressante, les procédures d'inférence optimales ont des taux de convergence qui dépendent de f . En ayant recours à une asymptotique à la Le Cam, nous montrons que la moyenne sphérique est, pour toute nuisance f , un estimateur paramétriquement super-efficace de θ et que les tests de Watson et de Wald pour $\mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0$ jouissent de propriétés non-standards d'optimalité similaires. Nos résultats sont illustrés par des simulations. D'un point de vue technique, nos résultats asymptotiques requièrent des développements délicats de fonctionnelles à symétrie rotationnelle pour des grandes valeurs de l'argument de la nuisance fonctionnelle f .

Mots-clés. Distributions concentrées, normalité locale asymptotique, statistique directionnelle, super-efficacité, théorie asymptotique des expériences statistiques de Le Cam

Abstract. Motivated by the fact that circular or spherical data are often much concentrated around a location θ , we consider inference about θ under high concentration asymptotic scenarios for which the probability of any fixed spherical cap centered at θ converges to one as the sample size n diverges to infinity. Rather than restricting to Fisher-von Mises-Langevin distributions, we consider a much broader, semiparametric, class of rotationally symmetric distributions indexed by the location parameter θ , a scalar concentration parameter κ and a functional nuisance f . We determine the class of distributions

for which high concentration is obtained as κ diverges to infinity. For such distributions, we then consider inference (point estimation, confidence zone estimation, hypothesis testing) on $\boldsymbol{\theta}$ in asymptotic scenarios where κ_n diverges to infinity at an arbitrary rate with the sample size n . Our asymptotic investigation reveals that, interestingly, optimal inference procedures on $\boldsymbol{\theta}$ show consistency rates that depend on f . Using asymptotics “à la Le Cam”, we show that the spherical mean is, at any f , a parametrically super-efficient estimator of $\boldsymbol{\theta}$ and that the Watson and Wald tests for $\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ enjoy similar, non-standard, optimality properties. Our results are illustrated by Monte Carlo simulations. On a technical point of view, our asymptotic derivations require challenging expansions of rotationally symmetric functionals for large arguments of the nuisance function f .

Keywords. Concentrated distributions, directional statistics, Le Cam’s asymptotic theory of statistical experiments, local asymptotic normality, super-efficiency

Bibliographie

- Cutting, C., Paindaveine, D. and Verdebout, T. (2017). Testing uniformity on high-dimensional spheres against monotone rotationally symmetric alternatives, *Annals of Statistics*, 45, pp. 1024-1058.
- Paindaveine, D. and Verdebout, T. (2017). Inference on the mode of weak directional signals: a Le Cam perspective on hypothesis testing near singularities, *Annals of Statistics*, 45, pp. 800-832.
- Paindaveine, D. and Verdebout, T. (2019). Detecting the direction of a signal on high-dimensional spheres: Non-null and Le Cam optimality results, arXiv:1711.02504v2.
- Paindaveine, D. and Verdebout, T. (2019). Inference for spherical location under high concentration, arXiv:1901.00359.