

ON PROJECTION-BASED TESTS OF UNIFORMITY ON THE HYPERSPHERE

Eduardo García-Portugués ¹, Paula Navarro-Esteban ² & Juan Cuesta-Albertos ²

¹ *Department of Statistics, Carlos III University of Madrid, Calle Madrid 126, 28903 Getafe, Spain (edgarcia@est-econ.uc3m.es)*

² *Department of Mathematics, Statistics and Computer Science, University of Cantabria, Avenida de los Castros s/n, 39005 Santander, Spain (paula.navarro@unican.es, juan.cuesta@unican.es)*

Résumé. Nous étudions une classe de tests d'uniformité sur l'hypersphère basée sur la projection en utilisant des statistiques qui intègrent, dans toutes les directions possibles, la différence quadratique pondérée entre la fonction de distribution cumulative empirique des données projetées et la distribution uniforme projetée. La classe est motivée par la proposition de Cuesta-Albertos et al. (2009), qui construit une statistique de test de Kolmogorov–Smirnov sur les projections des données dans un ensemble de directions choisies au hasard. Des expressions simples pour plusieurs statistiques de test sont obtenues pour le cercle et la sphère, et des formes relativement faciles à manipuler pour des dimensions supérieures. Malgré leurs origines différentes, il a été démontré que la classe proposée et la classe de tests d'uniformité Sobolev (voir, par exemple, Prentice (1978)) étaient liées. Notre nouvelle paramétrisation se révèle avantageuse en permettant de dériver de nouveaux tests pour les données hypersphériques qui étendent nettement les tests circulaires de Watson, Ajne et Rothman, et en introduisant la première instance d'un test à la Anderson and Darling (1954) dans un tel contexte. Les distributions asymptotiques et l'optimalité locale par rapport à certaines alternatives des nouveaux tests sont obtenues. Une étude par simulation corrobore les résultats théoriques et montre que, pour certains scénarios, les nouveaux tests sont compétitifs par rapport aux propositions précédentes. Enfin, un exemple réel de données illustre l'utilisation des nouveaux tests.

Mots-clés. Données circulaires, données directionnelles, hypersphère, tests de Sobolev, uniformité.

Abstract. We study a projection-based class of uniformity tests on the hypersphere using statistics that integrate, along all possible directions, the weighted quadratic discrepancy between the empirical cumulative distribution function of the projected data and the projected uniform distribution. The class is motivated by the proposal by Cuesta-Albertos et al. (2009), which builds a Kolmogorov–Smirnov test statistic on the projections of the data in a set of randomly-chosen directions. Simple expressions for several test statistics are obtained for the circle and sphere, and relatively tractable forms for higher dimensions. Despite their different origins, the proposed class and the well-studied Sobolev class of uniformity tests (see, e.g., Prentice (1978)) are shown to be related. Our

new parametrization proves itself advantageous by allowing to derive new tests for hyperspherical data that neatly extend the circular tests by Watson, Ajne, and Rothman, and by introducing the first instance of an Anderson and Darling (1954)-like test in such context. The asymptotic distributions and the local optimality against certain alternatives of the new tests are obtained. A simulation study corroborates the theoretical findings and evidences that, for certain scenarios, the new tests are competitive against previous proposals. Finally, a real data example illustrates the usage of the new tests.

Keywords. Circular data, directional data, hypersphere, Sobolev tests, uniformity.

Bibliographie

Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1954). A test of goodness of fit. *Journal of American Statistical Association*, 49, pp. 765–769.

Cuesta-Albertos, J. A., Cuevas, A. and Fraiman, R. (2009). On projection-based tests for directional and compositional data. *Statistics and Computing*, 19, pp. 367–380.

Prentice, M. J. (1978). On invariant tests of uniformity for directions and orientations. *Annals of Statistics*, 6, pp. 169–176.