

UNE APPROCHE PAR MOLLIFICATION AU PROBLÈME DE DÉCONVOLUTION DE DENSITÉS

Pierre MARÉCHAL ¹, Léopold SIMAR ² & Anne VANHEMS ³

¹ *IMT Toulouse, pr.marechal@gmail.com*

² *Institut de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain-la-Neuve, Belgium, leopold.simar@uclouvain.be*

³ *Toulouse Business School, a.vanhems@tbs-education.fr*

Résumé. Dans cet article, nous utilisons la méthode de mollification pour régulariser le problème de la déconvolution. Cette nouvelle méthode de régularisation offre un cadre unifié et général pour comparer les avantages de différents types de régularisation comme les noyaux de déconvolution, la méthode de Tikhonov ou la méthode de spectral cutoff. En particulier, l'approche par mollification permet d'assouplir certaines hypothèses restrictives requises pour les noyaux de déconvolution, et a de meilleures propriétés stabilisantes comparées au spectral cutoff ou Tikhonov. Nous prouvons la convergence asymptotique de notre estimateur et fournissons des simulations pour comparer les propriétés échantillon fini de notre estimateur avec les méthodes classiques.

Mots-clés. déconvolution, mollification.

Abstract. In this paper, we use mollification to regularize the deconvolution problem. This new regularization method offers a unifying and generalizing framework in order to compare the benefits of various different filter-type techniques like deconvolution kernels, Tikhonov or spectral cut-off method. In particular, the mollifier approach allows to relax some restrictive assumptions required for the deconvolution kernels, and has better stabilizing properties compared to spectral cutoff or Tikhonov. We prove the asymptotic convergence of our estimator and provide simulations to compare the finite sample properties of our estimator with respect to the well-known methods.

Keywords. deconvolution, mollification.

1 Contexte de l'étude

La déconvolution est un problème classique en statistique et en économétrie et est bien connue pour être un problème mal posé. Diverses méthodes de régularisation ont été proposés, parmi lesquels on trouve les noyaux de déconvolution (voir Stefanski et Carroll 1990, Fan 1991, Carroll et Hall 1988, Devroye 1989), la régularisation de Tikhonov (voir Carrasco et Florens 2007) et le spectral cutoff (voir Mair et Ruymgaart 1996 et Johannes 2009). Il existe également un courant de littérature sur la déconvolution utilisant des méthodes basées sur la projection, comme dans Comte et al. (2006, 2007, 2008), Efromovich 1997, Butucea et Matias 2005.

2 Méthodologie utilisée et présentation des principaux résultats

Dans cet article, nous proposons une méthode différente pour régulariser le problème de la déconvolution, qui utilise un principe de régularisation introduit dans le cadre déterministe, et qui a été appliqué dans plusieurs domaines du signal et traitement de l'image (déconvolution d'images en astronomie, tomographie comme dans Maréchal et al 2000. A notre connaissance, ce principe de régularisation na jamais été appliqué dans le cadre stochastique. Nous l'appelons la *régularisation par mollification*, ou simplement la *mollification*. Comme nous le verrons, cette approche de régularisation offre des avantages certains, notamment en termes de flexibilité, et aussi en termes de compromis habituel entre stabilité et fidélité au modèle.

Afin de comparer les avantages de notre nouvelle méthode de régularisation avec différentes approches, nous considérons la classe de *techniques de type filtre*, qui nous fournit un cadre unificateur et englobe la déconvolution par noyaux, le spectral cutoff, la régularisation de Tikhonov et la mollification. Dans cet article, nous allons:

1. introduire la méthode de mollification pour la déconvolution de variables aléatoires;
2. montrer que la mollification permet de relaxer certaines hypothèses restrictives requises par les noyaux de deconvolution, tout en ayant de meilleures propriétés stabilisatrices que la régularisation de Tikhonov et de meilleures propriétés morphologiques que le spectral cutoff;
3. prouver la convergence asymptotique de notre estimateur par mollification;
4. proposer des simulations pour comparer les propriétés à échantillon fini de notre estimateur par rapport aux méthodes classiques.

Bibliographie

Butucea, C. et Matias, C. (2005). Minimax estimation of the noise level and of the deconvolution density in a semiparametric convolution model, *Bernoulli*, 11(2), pp. 309-340.

Carrasco, M. et Florens, J.P. et Renault, E. (2007). Linear inverse problems in structural econometrics estimation based on spectral decomposition and regularization, *Handbook of Econometrics*, 6, pp. 5633-5751.

Carroll, R. et Hall, P. (1988). Optimal rates of convergence for deconvolving a density, *Journal of the American Statistical Association*, 83(404), pp. 1184-1186.

Comte, F. et Rozenholc, Y. et Taupin, M.L. (2006). Penalized contrast estimator for adaptive density deconvolution, *Canadian Journal of Statistics*, 34(3), pp. 431-452.

- Comte, F. et Rozenholc, Y. et Taupin, M.L. (2007). Finite sample penalization in adaptive density deconvolution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 34(3), pp. 431-452.
- Comte, F. et Dedecker, J. et Taupin, M.L. (2008). Adaptive density deconvolution with dependent inputs, *Mathematical methods of Statistics*, 17(2).
- Devroye, L. (1989). Consistent deconvolution in density estimation, *Canadian Journal of Statistics*, 17(2), PP. 235-239.
- Efromovich, S. (1997). Density estimation for the case of supersmooth measurement error, *Journal of the American Statistical Association*, 92(438), pp. 526-535.
- Fan, J. (1991). Global behavior of deconvolution kernel estimates, *Statistica Sinica*, pp.541-551.
- Johannes, J. (2009). Deconvolution with unknown error distribution, *The Annals of Statistics*, 37(5A), pp. 2301-2323.
- Mair, B. A et Ruymgaart, F. H (1996), Statistical inverse estimation in Hilbert scales, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 56(5), pp. 1424-1444.
- Maréchal, P. et Togane, D. et Celler, A. (2000). A new reconstruction methodology for computerized tomography: FRECT (Fourier Regularized Computed Tomography), *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 47(4), pp. 1595-1601.