

TESTS DE RUPTURE DANS LES MODÈLES CHARN

Marwa Ltaifa ¹ & Joseph Ngatchou-Wandji ²

¹ *IECL, Université de Lorraine, France & LAMMDA, Université de Sousse, Tunisie.*

E-mail : marwa.ltaifa@univ-lorraine.fr

² *IECL, Université de Lorraine, France.*

E-mail : joseph.ngatchou-wandji@univ-lorraine.fr

Résumé. Nous étudions un test du rapport de vraisemblance permettant de détecter les ruptures discrètes dans la moyenne des modèles CHARN. Nous montrons que dans le cas où les paramètres du modèle sont connus, le test est asymptotiquement optimal et nous donnons une forme explicite de sa puissance asymptotique. Dans le cas où les paramètres sont inconnus, en les remplaçant par des estimateurs appropriés, le test reste optimal et une expression explicite de la puissance locale est donnée.

Une étude de simulation permettra d'évaluer les performances de la méthode.

Mots-clés. Séries chronologiques, test du rapport de vraisemblance, optimalité, contiguïté, rupture...

Abstract. We study a likelihood ratio test for detecting small breaks in the mean of CHARN models. We show that in the case the parameters of model are assumed to be known, the test is asymptotically optimal and we give an explicit form of its asymptotic power. In the case the parameters are unknown, replacing them by suitable estimators, the test remains optimal and an explicit expression of the local power is provided.

A simulation study will evaluate the performance of the method.

Keywords. Time series, likelihood ratio test, optimality, contiguity, break...

1 Introduction

Nous nous intéressons à l'étude d'un phénomène présentant un risque qui peut être financier, une crise économique, une épidémie, une maladie émergente, un changement climatique etc. Notre but est de détecter à partir de données temporelles issues de ce phénomène, les instants t_1, t_2, \dots, t_k , $k \in \mathbb{N}^*$ signalant le risque étudié. Plus précisément, on suppose qu'on observe X_1, X_2, \dots, X_n , $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $j = 1, \dots, k$, $n_j(n) = t_j - t_{j-1} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que la loi stationnaire sur $[t_{j-1}, t_j[$, $j = 1, \dots, k$ est de fonction de répartition F_j . On suppose aussi que pour tout $j = 1, \dots, k$, $\frac{n_j(n)}{n} \rightarrow \alpha_j$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et que si $n_j(n)$ est fini alors $\alpha_j = 0$.

Nous nous plaçons dans le cadre où les observations issues du phénomène étudié peuvent être modélisées par le modèle CHARN suivant :

$$X_t = T(Z_{t-1}) + \gamma^\top \omega(t) + V(Z_{t-1})\varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

où $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, $\omega(t) = (\mathbf{1}_{t=t_1}, \mathbf{1}_{t=t_2}, \dots, \mathbf{1}_{t=t_k})^\top \in \{0, 1\}^k$, $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus localement stationnaire et ergodique, $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc centré réduit de densité f , pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $Z_t = (X_t, \dots, X_{t-p+1})'$ et T et V sont deux fonctions réelles. Soit $\gamma_0 \in \mathbb{R}^k$ connu. Notre travail consiste à tester

$$H_0 : \gamma = \gamma_0 \text{ contre } H_1^{(n)} : \gamma = \gamma_0 + \frac{\beta}{\sqrt{n}} = \gamma_n, \quad n > 1.$$

Nous utilisons pour cela le test du rapport de vraisemblance.

Les premiers résultats sur la détection de ruptures datent de Page [7], lorsqu'il utilisait les sommes partielles pour tester les changements dans la moyenne des observations indépendantes. De nos jours, des résultats importants ont été obtenus sur ce sujet (par exemple Bardet et al. [1], Härdle et al. [4], Huh et Jib [5], Kengne et William Charky [6], Zhou, Zhou [8] etc.). Le cadre paramétrique reste le mieux étudié ; beaucoup de questions restent sans réponse dans les cas semi-paramétriques et non-paramétriques.

2 Résultats

Le log du rapport de vraisemblance de H_0 contre $H_1^{(n)}$ est le suivant :

$$\Lambda_n = \sum_{i=1}^n \log(f(\varepsilon_i(\gamma_n)) - \log(f(\varepsilon_i(\gamma_0))),$$

où pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)' \in \mathbb{R}^k$ et pour tout $t = 1 \dots, n$,

$$\varepsilon_t(\gamma) = \frac{X_t - T(Z_{t-1}) - \gamma \cdot \omega(t)}{V(Z_{t-1})}.$$

Nous étudions d'abord le cas où les fonctions T et V sont connues. Ici, nous établissons La propriété **LAN** définie dans [3] et calculons la puissance locale.

Ensuite, nous étudions le cas où les fonctions T et V sont de formes connues, mais dépendent de paramètres inconnues i.e $T(x) = m(x; \rho)$, $V(x) = \sigma(x; \theta)$, $\rho \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ et $\theta \in \tilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^a$. Soit alors $\psi_0 = (\rho'_0, \theta'_0)' \in \Theta \times \tilde{\Theta} \subset \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^a$ le vrai paramètre du modèle (1). Nous définissons un estimateur consistant ψ_n de ψ_0 , et nous montrons que sous certaines conditions, sous H_0 , $\sqrt{n}(\psi_n - \psi_0)$ converge en loi vers un vecteur gaussien centré et sous $H_1^{(n)}$, $\sqrt{n}(\psi_n - \psi_0)$ converge en loi vers un vecteur gaussien non centré.

Après, nous montrons que $\Lambda_n(\psi_0) = \Lambda_n(\psi_{N(n)}) + o_P(1)$, où $N(n)$ est une sous-suite de $\{1, \dots, n\}$ telle que $N(n) > n, \forall n$, et $\Lambda_n(\psi)$ est Λ_n où l'on a remplacé $\varepsilon_i(\gamma)$ par

$$\varepsilon_t(\psi, \gamma) = \frac{X_t - m(Z_{t-1}, \rho) - \gamma \cdot \omega(t)}{\sigma(Z_{t-1}, \theta)}, \psi = (\rho, \theta) \in \Theta \times \tilde{\Theta}, \gamma \in \mathbb{R}^k.$$

Ceci, nous permet de conclure que le test reste optimal.

Dans la suite, nous nous intéressons à l'étude de la convergence faible du processus de vraisemblance indexé par β .

Soit pour tout $(\psi, \gamma) \in \mathbb{R}^{lq} \times \mathbb{R}^k$, $\Lambda_n = \{\Lambda_n(\psi, \gamma, \beta)\}_{\beta \in \mathbb{R}^k}$ et $\Lambda = \{\Lambda(\psi, \gamma, \beta)\}_{\beta \in \mathbb{R}^k}$, où pour tout $(\psi, \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^{lq} \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$,

$$\Lambda_n(\psi, \gamma, \beta) = \sum_{i=1}^n \log \left[f \left(\varepsilon_i \left(\psi, \gamma + \frac{\beta}{\sqrt{n}} \right) \right) \right] - \log[f(\varepsilon_i(\psi, \gamma))]$$

et $\Lambda(\psi, \gamma, \beta)$ une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N} \left(-\frac{\mu(\psi, \beta)}{2}, \mu(\psi, \beta) \right)$, avec $\mu(\psi, \beta) =$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \beta_j^2 \mu_{j,2}(\psi), \quad \mu_{j,2}(\psi) = I(f) \int \frac{1}{\sigma^2(x, \theta)} dF_j(x) \quad \text{et} \quad I(f) = \int \phi_f^2(x) f(x) dx < \infty, \quad \text{où}$$

$$\phi_f = -\frac{f'}{f}.$$

Sous certaines hypothèses, en utilisant le Théorème 12.3 de Billingsley (1968), nous montrons que pour tout $(\psi, \gamma) \in \mathbb{R}^{lq} \times \mathbb{R}^k$, sous H_0 ,

$\{\Lambda_n(\psi, \gamma, \cdot), n \geq 1\}$ converge faiblement vers le processus gaussien $\Lambda(\psi, \gamma, \cdot)$ dans $C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$,

où $C(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ c'est l'espace des fonctions continues, définie sur \mathbb{R}^k à valeurs dans \mathbb{R} .

Puisque en pratique le paramètre γ_0 est inconnu, nous l'estimons par le maximum de vraisemblance et nous montrons que le test reste optimal.

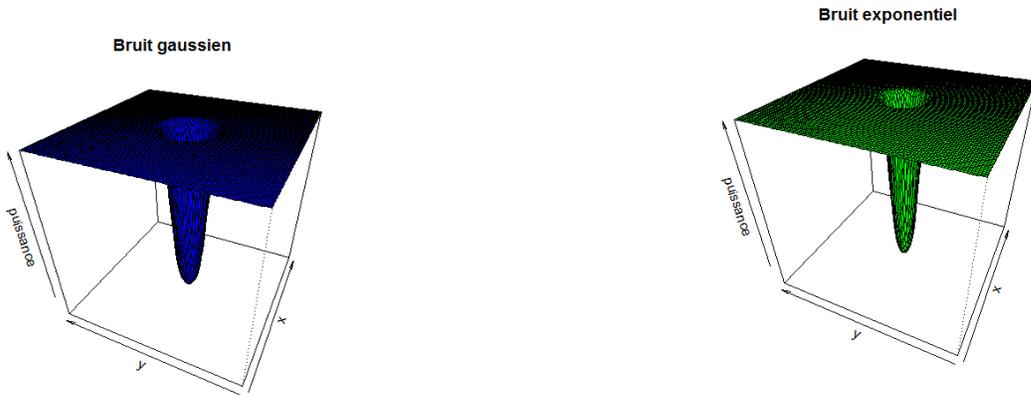
3 Simulation

Dans cette partie, nous effectuons des simulations en utilisant le logiciel R pour évaluer la performance de nos résultats théoriques.

3.1 Modèle à une seule rupture

Nous générons les observations à partir du modèle suivant :

$$\begin{cases} X_i = T(X_{i-1}) + \frac{\beta_1}{\sqrt{n}} + V(X_{i-1})\varepsilon_i, & i = 1, \dots, 30, \\ X_i = T(X_{i-1}) + \frac{\beta_2}{\sqrt{n}} + V(X_{i-1})\varepsilon_i, & i = 31, \dots, 60, \end{cases} \quad (2)$$



(a) Puissance locale du test dans le cas où f est la densité normale centrée réduite.

(b) Puissance locale du test dans le cas où f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.25.

FIGURE 1 – La puissance locale du test.

où $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ est un bruit de densité f et pour tout $j = 1, \dots, k$, β_j est une valeur arbitraire entre -10 et 10 . Dans le cas où f est une densité normale centrée réduite, $I(f) = 1$. Ici, $k = 2$, $n = 60$ et $n_1(n) = n_2(n) = 30$.

La figure 1 correspond à la puissance locale du test lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(x) = \rho x$, où ρ est un paramètre inconnu et $V(x) = 1$ et la figure 2 correspond à la puissance du test pour $T(x) = 0.5x$, $V(x) = 1$ et γ_0 est inconnu.



(a) Puissance locale du test dans le cas où f est la densité normale centrée réduite.

(b) Puissance locale du test dans le cas où f est la densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.25.

FIGURE 2 – La puissance locale du test.

3.2 Modèle à deux points de ruptures

Considérons maintenant le cas où on a deux ruptures. Cela correspond au cas où $k = 3$. Nous considérons des échantillons de taille $n = 100$, $n_1(n) = n_2(n) = 30$ et $n_3(n) = 40$. Nous générons les observations à partir du modèle suivant :

$$\begin{cases} X_i = 0.75X_{i-1} + \frac{\beta_1}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 1, \dots, 30, \\ X_i = 0.75X_{i-1} + \frac{\beta_2}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 31, \dots, 60, \\ X_i = 0.75X_{i-1} + \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 61, \dots, 100, \end{cases} \quad (3)$$

où ε_i est un bruit de densité f et pour tout $j = 1, \dots, k$, β_j est une valeur arbitraire entre -10 et 10 . Les valeurs de la puissance du test sont mentionnées dans le tableau suivant :

β	$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.5 \\ 2.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.75 \\ 2.2 \\ 3.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 3.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 0.75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4.7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
Puissance ¹	0.07679903	0.28368234	0.73774095	0.97846668	0.99999985	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
Puissance ²	0.09027874	0.44465498	0.94020961	0.99976955	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000

TABLE 1 – Puissance locale pour un modèle à deux points de ruptures

3.3 Modèle à trois points de ruptures

De même, considérons le cas où on a 3 points de ruptures. Cela correspond au cas où $k = 4$. Nous considérons des échantillons de taille $n = 200$, $n_1(n) = 60$, $n_2(n) = 40$ et $n_3(n) = n_4(n) = 50$. Nous générons les observations à partir du modèle suivant :

$$\begin{cases} X_i = 0.5X_{i-1} + \frac{\beta_1}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 1, \dots, 60, \\ X_i = 0.5X_{i-1} + \frac{\beta_2}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 61, \dots, 100, \\ X_i = 0.5X_{i-1} + \frac{\beta_3}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 101, \dots, 150, \\ X_i = 0.5X_{i-1} + \frac{\beta_4}{\sqrt{n}} + \varepsilon_i, & i = 151, \dots, 200, \end{cases} \quad (4)$$

où ε_i est un bruit de densité f et pour $j = 1, \dots, k$, β_j est une valeur arbitraire dans $[-10, 10]$. Les résultats obtenus sont les suivants :

-
1. Cas où f est la densité Gaussienne standard.
 2. Cas où f est la densité de la loi exponentielle de paramètre 1.25.

β	$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \\ 1.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.75 \\ 1.2 \\ 2 \\ 2.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.2 \\ 1.5 \\ 2.2 \\ 2.8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.75 \\ 2.2 \\ 3.2 \\ 0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \\ 3.8 \\ 1.75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 4 \\ 3.2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
Puissance ¹	0.09546148	0.19839902	0.61271272	0.48106588	0.99969502	0.99999998	0.99998748	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000
Puissance ²	0.1206136	0.2995542	0.8566443	0.9879460	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000

TABLE 2 – Puissance locale pour un modèle à deux points de ruptures

3.4 Commentaires

Nous observons que dans tous les exemples considérés, la puissance du test tend vers toujours à 1, ce qui implique que notre test est localement puissant.

Si on compare la figure 1 à la figure 2, on observe que les courbes sont très similaires. Il semble que l'estimation du paramètre de nuisance et l'estimation de γ_0 n'affectent pas beaucoup sur la puissance du test.

La figure 1, Table 1 et Table 2, montrent que la puissance du test dans le cas d'un bruit exponentiel tend plus vite vers 1 que dans le cas d'un bruit gaussien. Cela signifie que lorsque les paramètres du modèle sont connus et lorsque le paramètre de nuisance est estimé, le test est beaucoup plus puissant sous les modèles CHARN locaux à bruit exponentiel que les modèles CHARN locaux à bruit gaussien.

Bibliographie

- [1] Bardet, Jean-Marc, and William Kengne. "Monitoring procedure for parameter change in causal time series." *Journal of Multivariate Analysis* 125 (2014) : 204-221.
- [2] Billingsley, Patrick. *Weak convergence of measures : Applications in probability*. Vol. 5. Siam, 1971.
- [3] Droesbeke Jean-Jacques, Fine Jeanne : *Inférence non paramétrique-Les statistiques de rangs* 1987.
- [4] Härdle, Wolfgang, and Alexandre Tsybakov. "Local polynomial estimators of the volatility function in nonparametric autoregression." *Journal of econometrics* 81.1 (1997) : 223-242.
- [5] Huh, Jib. "Detection of a change point based on local-likelihood." *Journal of Multivariate Analysis* 101.7 (2010) : 1681-1700.
- [6] Kengne, William Charky. "Testing for parameter constancy in general causal time-series models." *Journal of Time Series Analysis* 33.3 (2012) : 503-518.
- [7] Page, E. S. (1955). A test for a change in a parameter occurring at an unknown point. *Biometrika*, 42(3/4), 523-527.
- [8] Zhou, Zhou. "Nonparametric specification for non-stationary time series regression." *Bernoulli* 20.1 (2014) : 78-108.