

# ESTIMATION D'EXPOSANTS DE HURST DANS UN CADRE STATIONNAIRE

Matthieu Garcin

*Léonard de Vinci Pôle Universitaire, Research center, 92916 Paris La Défense, France,  
prénom.nom [ at ] m4x.org*

**Résumé.** Les propriétés de changement d'échelle d'une série temporelle peuvent être décrites par une statistique simple : l'exposant de Hurst. On lie aussi souvent la valeur de l'exposant de Hurst à la persistance de la série : si  $H = 1/2$ , il n'y a pas d'autocorrélation, si  $H > 1/2$  la série est persistante et si  $H < 1/2$  elle est anti-persistante. Cependant l'interprétation de l'exposant de Hurst dépend fortement du modèle décrivant la dynamique. En particulier, le cas des modèles stationnaires est intéressant, notamment pour son application en finance. Nous présentons deux modèles fractales stationnaires dans lesquels l'exposant de Hurst est impliqué : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire et la transformée de Lamperti inverse du mouvement brownien fractionnaire. Nous exposons les spécificités de l'estimation de l'exposant de Hurst pour ces modèles, de même que les conséquences dans l'interprétation de ce qu'est un exposant de Hurst dans ce cas et de la manière dont une série stationnaire pourrait être prédite.

**Mots-clés.** Mouvement brownien fractionnaire, processus stationnaire, taux de change.

**Abstract.** The scaling properties of a time series can be described by a simple statistic: the Hurst exponent. One also often links the value of the Hurst exponent to the persistence of the series: if  $H = 1/2$  there is no autocorrelation, if  $H > 1/2$  the series is persistent and if  $H < 1/2$  the series is anti-persistent. However, the interpretation of the Hurst exponent is strongly dependent on the model describing the dynamic. In particular, the case of stationary models is of interest, especially for finance. We present two fractal stationary models in which the Hurst exponent is involved: a fractional Ornstein-Uhlenbeck process and the Lamperti transform of a fractional Brownian motion. We expose the specificities of the estimation of the Hurst exponent for these models as well as the consequences in the interpretation of what is a Hurst exponent in this case and of how a stationary series could be forecast.

**Keywords.** Fractional Brownian motion, stationary process, foreign exchange rate.

## 1 Introduction

Le mouvement brownien fractionnaire (mbf) a été introduit par Mandelbrot et van Ness (1968). Avec un exposant de Hurst  $H \in (0, 1)$  et un paramètre de volatilité  $\sigma$ , le mbf  $X$  est défini

comme le seul processus gaussien de moyenne nulle, valant zéro à l'origine et ayant la fonction de covariance suivante, pour tout couple  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\mathbb{E}\{X_t X_s\} = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Par définition,  $X$  est  $H$ -autosimilaire :  $\forall t, \lambda > 0$ ,  $X_t$  et  $\lambda^{-H} X_{\lambda t}$  ont la même distribution de probabilité. Des versions stationnaires de ce processus existent, comme le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (fOU) ou la transformée de Lamperti inverse (TLI) du mbf. Ces processus ont une utilité notamment en finance pour modéliser des séries réputées stationnaires comme des taux ou des taux de change. Cependant, dans ce cadre stationnaire, des particularités existent dans l'estimation et l'interprétation de l'exposant de Hurst :

- **Estimation** : Une des techniques d'estimation de l'exposant de Hurst repose sur une régression des log-moments absolus des incréments du processus sur la log-durée de ces incréments (Peltier et Lévy Véhel (1994) et Coeurjolly (2005)). Pour un mbf, la régression est linéaire et l'exposant de Hurst est lié à la pente de la droite. Dans sa version stationnarisée, la régression n'est plus linéaire et il faut estimer autrement l'exposant de Hurst.
- **Interprétation** : Pour un mbf, un exposant de Hurst supérieur à 1/2 indique de la persistance, alors qu'une valeur sous ce seuil indique une autocorrélation négative. Dans une version stationnarisée, le comportement du processus dépend de l'échelle d'observation (Garcin (2018)) et la mémoire longue peut ou non exister, selon la méthode de stationnarisation (Cheridito *et al.* (2003)).

On prétend ici montrer que l'analyse standard de l'exposant de Hurst d'un processus doit être subordonnée à une analyse de sa stationnarité. Si le processus est stationnaire, il faut pouvoir choisir entre deux modèles (au moins) et revisiter la manière d'estimer et de comprendre l'exposant de Hurst.

Dans ce qui suit, on présente ainsi les versions stationnarisées du mbf, puis les conséquences en termes d'estimation et d'interprétation de l'exposant de Hurst. Nous terminerons avec une application à des séries temporelles financières.

## 2 Stationnarisation du mbf

Dans la littérature, on trouve deux manières de stationnariser un mbf :

- La TLI transforme tout processus  $H$ -autosimilaire<sup>1</sup> en un processus stationnaire (Lamperti (1962), Flandrin *et al.* (2003) et Lee *et al.* (2016)). Elle est définie par

---

<sup>1</sup> On s'intéresse ici uniquement au cas du mbf  $X$ , d'exposant de Hurst  $H$ .

$(\mathcal{L}_H^{-1}X)_t = e^{-Ht}X_{exp(t)}$ . Dans ce qui suit, on utilisera ce processus en ajoutant une dilatation ou une contraction du temps,  $Y_t = (\mathcal{L}_H^{-1}X)_{\theta t}$ , pour  $\theta > 0$ , processus qui est également stationnaire.

- Le processus fOU s'appuie sur un retour à la moyenne explicite :  $dZ_t = -\alpha(Z_t - \mu)dt + \sigma dX_t$ , avec  $\alpha > 0$  la force de retour à la moyenne et  $\mu \in \mathbb{R}$  la moyenne de long terme (Hu et Nualart (2010), Šapina *et al.* (2017) et Chevillard (2017)).

Dans le cas où  $H = 1/2$ , dans lequel  $X$  est un mouvement brownien standard, les deux stationnarisations sont équivalentes : le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est la TLI du brownien sous-jacent. Mais quand  $H \neq 1/2$ , Cheridito *et al.* (2003) ont montré que les deux processus, fOU et TLI du mbf, sont différents car ils n'ont pas la même fonction d'autocorrélation. De plus, quand  $H > 1/2$ , le processus fOU a bien de la mémoire longue, comme le mbf, mais ceci n'est pas le cas de la TLI du mbf.

### 3 Estimation de l'exposant de Hurst

Si nous observons un processus  $S$  sur l'intervalle  $[0, N]$ , on peut définir le  $k$ -ième moment absolu de ses incréments à l'échelle  $\tau > 0$  par :

$$M_{k,\tau,N}(S) = \frac{1}{\lfloor N/\tau \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor N/\tau \rfloor} |S_{i\tau} - S_{(i-1)\tau}|^k.$$

Alors,  $\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(S)] = \frac{2^{k/2}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\sigma^k\tau^{kH}$  et  $\ln(\tau) \mapsto \ln(\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(S)])$  fournit, dans le cas où  $S$  est un mbf, une droite de pente  $kH$ , ce qui fournit un estimateur de  $H$  :  $\hat{H}$  est  $1/k$  fois la pente de  $\ln(\tau) \mapsto \ln(M_{k,\tau,N}(S))$ .

Dans le cas stationnaire, cette courbe sera aplatie pour les échelles plus grandes. Cela est justifié, dans le cas de la TLI du mbf, par le théorème suivant (Garcin (2018)) et son illustration dans la Figure 1. Cet aspect peut s'expliquer par le mécanisme suivant : à une échelle fine, les fluctuations du mbf sous-jacent sont les seules visibles, alors qu'à une échelle plus grossière l'effet de retour à la moyenne est prépondérant.

**Théorème 1.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\tau > 0$ ,  $H \in (0, 1)$ ,  $\theta > 0$ ,  $X$  un mbf d'exposant de Hurst  $H$  et de volatilité  $\sigma$  et  $Y_t = (\mathcal{L}_H^{-1}X)_{\theta t}$ . Nous avons

$$\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(X)] = A(\sigma, k)\tau^{kH}$$

et

$$\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(Y)] = A(\sigma, k) [2 - e^{\theta H \tau} (1 + e^{-2\theta H \tau} - |1 - e^{-\theta \tau}|^{2H})]^{k/2},$$

où  $A(\sigma, k) = \frac{2^{k/2}\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\sigma^k$ . De plus, nous avons asymptotiquement, quand  $\theta\tau \rightarrow 0$  :

$$\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(Y)] = A(\sigma, k)\theta^{kH}\tau^{kH} + \mathcal{O}(\theta\tau)^{kH+\min(1,2-2H)}.$$

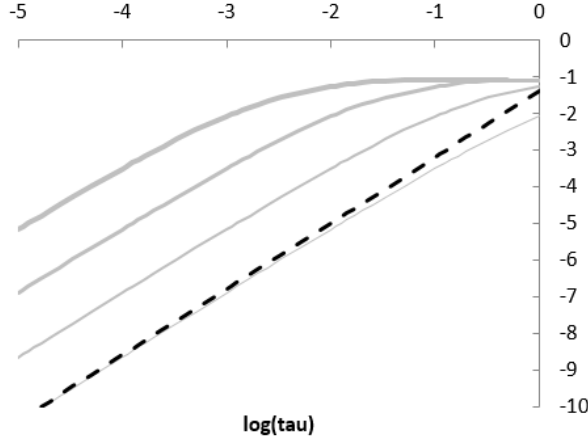


Figure 1: Valeur de  $\log(\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(X)])$  (noir) et  $\log(\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(Y)])$  (gris, pour plusieurs valeurs de  $\theta$ , du plus fin au plus épais : 1, 10, 100, 1000) en fonction de  $\log(\tau)$ . Paramètres :  $H = 0.9$ ,  $k = 2$  et  $\sigma = 0.2$ .

## 4 Interprétation de l'exposant de Hurst dans le cadre stationnaire

A la lumière de la forme théorique de  $\ln(\tau) \mapsto \ln(M_{k,\tau,N}(S))$  pour un mbf stationnarisé, nous distinguerons plusieurs notions d'exposant de Hurst :

- *l'exposant de Hurst sous-jacent*, qui est celui du mbf  $X$  sous-jacent et qui peut être estimé comme  $1/k$  fois la pente de la courbe  $\ln(\tau) \mapsto \ln(M_{k,\tau,N}(S))$  pour les faibles valeurs de  $\tau$  ;
- *l'exposant de Hurst ressenti* (respectivement *local*), qui est égal à  $1/k$  fois la pente moyenne de la courbe (resp. la pente de la courbe en une échelle donnée)  $\ln(\tau) \mapsto \ln(M_{k,\tau,N}(S))$  ; c'est l'exposant de Hurst biaisé qui serait obtenu par un estimateur standard des moments absolus avec régression linéaire (resp. en se limitant à une seule échelle).

Si l'exposant de Hurst sous-jacent est supérieur à  $1/2$ , il y a de la mémoire longue dans le cas fOU mais pas dans le cas TLI. Par ailleurs, la fonction d'autocorrélation est toujours négative si  $H < 1/2$ , mais si  $H > 1/2$  elle est positive pour les petites échelles et négative pour les grandes, l'échelle à laquelle elle change de signe correspondant à un exposant de Hurst local de  $1/2$  et étant déterminé par  $\theta$  dans l'approche TLI et  $\alpha$  dans l'approche fOU. Ce point est justifié par le résultat suivant (Garcin (2018)) et la Figure 2.

**Théorème 2.** Soit  $H \in (0, 1)$ ,  $s, \theta > 0$ ,  $X$  un mbf d'exposant de Hurst  $H$  et  $Y_t = (\mathcal{L}_H^{-1} X)_{\theta t}$ . Alors :

1. La covariance d'incrément adjacents de durée  $s$  est :

$$C(s) = \text{Cov}(Y_s - Y_0, Y_{2s} - Y_s) = \frac{\sigma^2}{2} [2h(\theta s) - 2 - h(2\theta s)],$$

où  $h : x \geq 0 \mapsto 2 \cosh(Hx) - (2 \sinh(\frac{x}{2}))^{2H}$ , avec le comportement asymptotique :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} C(s) = -\sigma^2.$$

2. La corrélation d'incrément adjacents de durée  $s$  est :

$$\rho(s) = \text{corr}(Y_s - Y_0, Y_{2s} - Y_s) = -1 + \frac{2 - h(2\theta s)}{4 - 2h(\theta s)},$$

avec le comportement asymptotique :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(s) = -\frac{1}{2}.$$

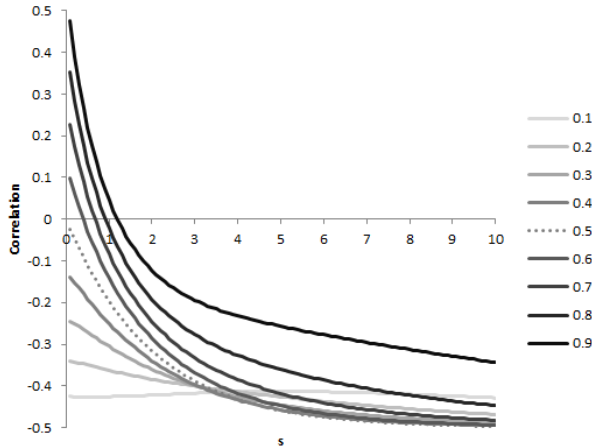


Figure 2: Corrélation d'incrément adjacents de durée  $s$ , pour  $H = 0.1, 0.2, \dots$

## 5 Application à des données financières et conclusion

Une étude des taux de change en haute fréquence (GBP, CHF, SEK, USD, CAD, AUD, JPY, CNY, SGD, tous contre l'EUR) montre une fonction  $\ln(\tau) \mapsto \ln(\mathbb{E}[M_{k,\tau,N}(S)])$  cohérente avec la TLI d'un mbf (Garcin (2018)). En particulier, la mémoire longue ne semble pas de mise, ce qui fait préférer ce modèle au fOU. Il est aussi intéressant de constater qu'à l'exception du couple GBP/EUR, tous ces taux de change ont un exposant de Hurst ressenti inférieur à  $1/2$  et un exposant de Hurst sous-jacent supérieur à  $1/2$ . Un exposant de Hurst supérieur à  $1/2$  favorisant des prévisions (Mitra (2012) et Garcin (2017)), cette étude empirique permet d'envisager des prévisions à court terme pour ces taux de change, confirmant de précédents travaux (on peut par exemple citer Garcin et Guégan (2016)).

## Bibliographie

- [1] CHERIDITO, P., KAWAGUCHI, H. ET MAEJIMA, M. (2003), *Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*, Electronic journal of probability, 8, 3 : 1-14
- [2] CHEVILLARD, L. (2017), *Regularized fractional Ornstein-Uhlenbeck processes and their relevance to the modeling of fluid turbulence*, Physical review E, 96, 3 : 033111
- [3] COEURJOLLY, J.-F. (2005), *Identification of multifractional Brownian motion*, Bernoulli, 11, 6 : 987-1008
- [4] FLANDRIN, P., BORGNAT, P. ET AMBLARD, P.-O. (2003), *From stationarity to self-similarity, and back: Variations on the Lamperti transformation*, Processes with long-range correlations, Springer, Berlin Heidelberg : 88-117
- [5] GARCIN, M. (2017), *Estimation of time-dependent Hurst exponents with variational smoothing and application to forecasting foreign exchange rates*, Physica A: statistical mechanics and its applications, 483 : 462-479
- [6] GARCIN, M. (2018), *Hurst exponents and delampertized fractional Brownian motions*, document de travail, disponible à <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01919754/>
- [7] GARCIN, M. ET GUÉGAN, D. (2016), *Wavelet shrinkage of a noisy dynamical system with non-linear noise impact*, Physica D: nonlinear phenomena, 325 : 126-145
- [8] HU, Y. ET NUALART, D. (2010), *Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes*, Statistics & probability letters, 80, 11-12 : 1030-1038
- [9] LAMPERTI, J. (1962), *Semi-stable stochastic processes*, Transactions of the American mathematical society, 104, 1 : 62-78
- [10] LEE, M., GENTON, M.G. ET JUN, M. (2016), *Testing self-similarity through Lamperti transformations*, Journal of agricultural, biological, and environmental statistics, 21, 3 : 426-447
- [11] MANDELBROT, B. ET VAN NESS, J. (1968), *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM review, 10, 4 : 422-437
- [12] MITRA, S.K. (2012), *Is Hurst exponent value useful in forecasting financial time series?*, Asian social science, 8, 8 : 111-120
- [13] PELTIER, R.F. ET LÉVY VÉHEL, J. (1994), *A new method for estimating the parameter of fractional Brownian motion*, Technical report 2396, INRIA
- [14] ŠAPINA, M., GARCIN, M., KRAMARIĆ, K., MILAS, K., BRDARIĆ, D. ET PIRIĆ, M. (2017), *The Hurst exponent of heart rate variability in neonatal stress, based on a mean-reverting fractional Lévy stable motion*, document de travail, disponible à <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01649280/>