A mollifier approach to the nonparametric instrumental regression problem

Pierre Maréchal [1] & Walter Cédric Simo Tao Lee [2] & Anne Vanhems [3]

[1] *IMT Toulouse, pr.marechal@gmail.com*
[2] *IMT Toulouse, cedric.lee@aims-cameroon.org*
[3] *Toulouse Business School, a.vanhems@tbs-education.fr*

Résumé. Dans cet article, nous utilisons la méthode de mollification pour régulariser le problème de régression instrumentale non paramétrique. Cette méthode de régularisation a été utilisée dans des domaines de recherche tels que l'imagerie médicale, la tomographie, l'astrophysique, mais jamais en statistique ou en économétrie. Contrairement aux méthodes classiques de régularisation telles que Tikhonov ou Spectral Cut-off, un objet cible est clairement défini en fonction de l'objet initial inconnu : il s'agit maintenant de résoudre un nouveau problème dont la solution est une version lissée de l'objet inconnu, le lissage étant obtenu par convolution. Nous prouvons la convergence asymptotique de notre estimateur mollifié dans le contexte de la régression instrumentale non paramétrique et présentons des simulations pour étudier les propriétés de notre estimateur par rapport aux méthodes de régularisation classiques.
Mots-clés. Mollification, régression non paramétrique instrumentale, ...

Abstract. In this paper, we use mollification to regularize the nonparametric instrumental regression problem. This regularization method has been used in research fields like medical imaging, tomography, astrophysics, but never in statistics or econometrics. Contrary to classical regularization methods like Tikhonov or Spectral Cut-off, a target object is clearly defined in terms of the unknown true object: the initial ill-posed problem is replaced by that of recovering a smooth version of the unknown object, smoothness being expressed in terms of convolution. We prove the asymptotic convergence of our mollified estimator in the context of the nonparametric instrumental regression and provide simulations to compare the finite sample properties of our estimator with respect to the well-known methods.
Keywords. Mollification, nonparametric instrumental regression, ...

1 Motivation et positionnement du problème

Soit $Z\colon \Omega \to \mathbb{R}^p$ et $Y, \varepsilon\colon \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires satisfaisant la relation suivante:

$$Y = \varphi(Z) + \varepsilon.$$

Dans ce contexte, Z est la *variable explicative*, Y est la *réponse*, ε est le terme d'*erreur*, et $\varphi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une fonction inconnue appelée *fonction de régression*. Le problème est alors d'identifier φ, sous l'hypothèse que Z et ε sont liées: $E(\varepsilon|Z) \neq 0$.

Notons que $E(\varepsilon|Z) = 0$ si et seulement si $E(Y|Z) = E(\varphi(Z)|Z) = \varphi(Z)$, et dans ce cas φ est identifié par

$$\varphi(Z) = E(Y|Z).$$

Dans le cas où $E(\varepsilon|Z) \neq 0$, la fonction φ ne peut pas être identifié par l'équation précédente. Il est alors classique d'introduire une *variable instrumentale* W, qui est liée à Z et pas à ε. Le modèle s'écrit alors:

$$Y = \varphi(Z) + \varepsilon, \quad E(\varepsilon|W) = 0,$$

soit

$$E(Y|W) = E(\varphi(Z)|W). \tag{1}$$

Sous l'hypothèse que toutes les variables sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (notée λ), nous définissons les densités

$$f_Y = \frac{\mathrm{d}P_Y}{\mathrm{d}\lambda}, \quad f_Z = \frac{\mathrm{d}P_Z}{\mathrm{d}\lambda}, \quad f_W = \frac{\mathrm{d}P_W}{\mathrm{d}\lambda}$$

et les ensembles

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y} &:= \operatorname{supp} f_Y = \operatorname{cl}\{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\},\\
\mathscr{Z} &:= \operatorname{supp} f_Z = \operatorname{cl}\{z \in \mathbb{R}^p \mid f_Z(z) > 0\},\\
\mathscr{W} &:= \operatorname{supp} f_W = \operatorname{cl}\{w \in \mathbb{R}^q \mid f_W(w) > 0\}.
\end{aligned}$$

Ici, $\operatorname{cl} S$ représente la fermeture de S. L'équation (1) peut se réécrire:

$$\int \frac{f_{YW}(y,w)}{f_Y(y) f_W(w)} y \,\mathrm{d}P_Y(y) = \int \frac{f_{ZW}(z,w)}{f_Z(z) f_W(w)} \varphi(z) \,\mathrm{d}P_Z(z) \tag{2}$$

pour P_W-presque toutes les valeurs de w. Ici, f_{YW} et f_{ZW} sont les densités jointes de (Y,W) et (Z,W), respectivement. Notons que les intégrandes définies dans l'équation (2) sont définies $(P_Y \otimes P_W)$-presque partout et $(P_Z \otimes P_W)$-presque partout, respectivement. Les espaces

$$L^2(\mathbb{R}^p, P_Z) := \left\{ \phi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int \phi^2 \,\mathrm{d}P_Z < \infty \right\}$$

et

$$L^2(\mathbb{R}^q, P_W) := \left\{ \psi\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int \psi^2 \,\mathrm{d}P_W < \infty \right\}$$

sont des espaces de Hilbert, munis des produits scalaires

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int \phi_1 \phi_2 \,\mathrm{d}P_Z \quad \text{et} \quad \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int \psi_1 \psi_2 \,\mathrm{d}P_W,$$

respectivement.

Nous supposerons par la suite que $E(Y^2) = \int y^2 \,\mathrm{d}P_Y < \infty$. Sous cette hypothèse, la fonction $r := E(Y|W = \cdot)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^q, P_W)$. On peut ainsi définir l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} T\colon & L^2(\mathbb{R}^p, P_Z) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^q, P_W) \\ & \varphi & \longmapsto & E(\varphi(Z)|W = \cdot) \end{array}$$

ou encore

$$T\varphi(w) = \int_{\mathscr{Z}} \frac{f_{ZW}(z,w)}{f_Z(z) f_W(w)} \varphi(z) \,\mathrm{d}P_Z(z) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{f_{ZW}(z,w)}{f_W(w)} \varphi(z) \,\mathrm{d}\lambda(z),$$

Ainsi, T est un opérateur intégral défini par la fonction noyau

$$k(z,w) = \frac{f_{ZW}(z,w)}{f_Z(z) f_W(w)},$$

Notre modèle (2) peut donc se réécrire

$$T\varphi = r. \tag{3}$$

sous l'hypothèse que $k \in L^2(\mathscr{Z} \times \mathscr{W}, P_Z \otimes P_W)$, T est un opérateur d'Hilbert-Schmidt, et donc compact. Ainsi T^*T est un opérateur compact positif et auto-adjoint. L'équation $T\varphi = r$ sur φ est alors un problème inverse mal posé.

La régularisation de Tikhonov a été largement étudiée pour ce problème (voir les articles de Hall et Horowitz 2005, Carrasco, Florens et Renault 2007, Darolles, Fan, Florens et Renault 2011).

2 Objectifs de notre travail et principaux résultats

Notre attention se concentrera sur une famille de méthodes qui trouve son origine dans les problèmes inverses d'imagerie, et qui donne une place particulière à la notion de résolution: la *mollification*. Cette approche possède quelques similarités avec la célèbre régularisation de Tikhonov, mais s'en éloigne toutefois en ce qu'elle définit une relation préalable claire entre l'objet inconnu et celui qui est visé lors de la reconstruction. Un problème inverse est en général mal posé si le modèle liant l'objet inconnu aux données n'est pas suffisamment riche pour permettre une reconstruction stable. La toute première étape dans la construction d'une méthode de régularisation devrait être, en conséquence, la spécification d'un objectif plus modeste. De nombreuses méthodes se concentrent toutefois sur l'enrichissement du modèle par de l'information a priori (dont on peut questionner la légitimité), ou bien la perturbation du modèle initial, ce qui, à l'instar de la régularisation de Tikhonov, n'est pas toujours satisfaisant. L'utilisation de *mollifieurs*, pour spécifier au préalable un nouvel objectif, plus modeste, remonte à la fin des années 80 et au début des années 90 (voir les articles de Lannes, Roques et Casanove 1987 et de Louis et Maass 1990). Un modèle altéré, mais stable, peut alors être construit en accord avec le nouvel objectif. Le terme de *mollification* a quelques fois été utilisé dans ce contexte, pour englober les approches de Lannes *et al.* d'un côté et celle de Louis et Maass de l'autre.

Jusqu'à un passé récent, les deux approches citées de la mollification étaient confinées à des problèmes particuliers et uniquement dans un cadre purement déterministe. Notre objectif est de formaliser la méthode de mollification dans le cadre stochastique de la régression non paramétrique instrumentale. Nous démontrons la convergence de notre estimateur et nous comparons les performances de notre estimateur avec les estimateurs de Tikhonov et de spectral cut-off à l'aide de simulations.

Bibliographie

[1] Alibaud, N., Maréchal, P. et Saesor, Y. (2009) A variational approach to the inversion of truncated Fourier operators, *Inverse Problems* 25(4),.

[2] Bonnefond, X. et Maréchal, P. (2009), A variational approach to the inversion of some compact operators, *Pacific Journal of Optimization*, 5(1), 97–110.

[3] Carrasco, M., J.P. Florens, J.P. et Renault, E. (2007), Linear inverse problems in structural econometrics estimation based on spectral decomposition and regularization, *Handbook of econometrics*, 6, 5633–5751.

[4] Darolles, S., Fan, Y., Florens, J.P. et Renault, E. (2011), Nonparametric instrumental regression, *Econometrica*, 79(5), 1541–1565.

[5] Hall, P. et Horowitz, J.L. (2005), Nonparametric methods for inference in the presence of instrumental variables, *The Annals of Statistics*, 33(6), 2904–2929.

[6] Lannes, A. et Roques, A. et Casanove, M.J. (1987), Stabilized reconstruction in signal and image processing; Part I: partial deconvolution and spectral extrapolation with limited field, *J. Mod. Opt.*, 34, 161–226.

[7] A.K. Louis, A.K. et Maass, P. (1990), A mollifier method for linear operator equations of the first kind, *Inverse Problems*, 6, 427–440.