# Modéliser des risques joints extrêmes et intermédiaires

Anne-Laure Fougères [1] & Simon Chatelain [2] & Johanna G. Nešlehová [3]

[1] *Université de Lyon, CNRS UMR 5208, Université Lyon 1, Institut Camille-Jordan, 43, boul. du 11 novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France ; fougeres@math.univ-lyon1.fr*
[2] *Université Lyon 1 et McGill University, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 805, rue Sherbrooke Ouest, Montréal (Québec) Canada H3A 0B9 ; simon.chatelain@mail.mcgill.ca*
[3] *Department of Mathematics and Statistics, McGill University, 805, rue Sherbrooke Ouest, Montréal (Québec) Canada H3A 0B9 ; johanna.neslehova@mcgill.ca*

**Résumé.** Les copules Archimax fournissent un modèle souple permettant de prendre en compte tout type de dépendance asymptotique entre extrêmes, en décrivant simultanément les risques joints à des niveaux intermédiaires, sous-asymptotiques. Une copule Archimax est caractérisée par deux paramètres fonctionnels, la fonction de dépendance caudale $\ell$ et le générateur Archimédien $\psi$, qui déforme la structure de dépendance des valeurs extrêmes. L'objectif de cette présentation est de faire état des récents développements obtenus en inférence semi-paramétrique pour les copules Archimax, à savoir l'obtention d'un estimateur non-paramétrique de $\ell$ et d'un estimateur basé sur les moments de $\psi$, supposant que cette dernière fonction appartient à une famille paramétrique. Plusieurs aspects importants seront discutés, incluant les conditions d'identifiabilité, le comportement asymptotique des estimateurs, ainsi que leurs performances pour de petites tailles d'échantillon. Une analyse de données de maxima mensuels de pluie en trois stations de Bretagne sera finalement présentée, exhibant une excellente adéquation du modèle Archimax avec générateur de Clayton, y compris dans les queues inférieure ou supérieure.

**Mots-clés.** Extrêmes multivariés, modéles sous-asymptotiques, copules, processus empiriques.

**Abstract.** Archimax copula models can account for any type of asymptotic dependence between extremes and at the same time capture joint risks at medium levels. An Archimax copula is characterized by two functional parameters, the stable tail dependence function $\ell$, and the Archimedean generator $\psi$ which distorts the extreme-value dependence structure. The aim of this talk is to present recent developments on semi-parametric inference for Archimax copulas, namely a nonparametric estimator of $\ell$ and a moment-based estimator of $\psi$ assuming the latter belongs to a parametric family. Several important aspects will be discussed, as identifiability conditions, asymptotic behavior of the estimators, and small samples performance. An analysis of monthly rainfall maxima at three stations in French Brittany is finally discussed, where the Archimax copula model with Clayton generator is seen to fit the data very well, both in the lower and in the upper tail.

**Keywords.** Multivariate extremes, subasymptotic modeling, copulas, empirical processes.

Dans de nombreuses applications telles que les sciences environnementales ou la gestion des risques par exemple, le comportement joint des extrêmes de plusieurs variables aléatoires revêt une importance toute particulière. Il joue un rôle clé dans l'évaluation des risques de catastrophes naturelles notamment, et dans le dimensionnement de structures (barrages, centrales, etc.). Une mauvaise spécification de la dépendance entre les variables peut mener à une sous-estimation notable des risques. Mais cette dépendance est à la fois à prendre en compte au niveau des extrêmes et au niveau "sous-asymptotique" ; on pourra pour s'en convaincre penser aux phénomènes d'inondations, qui se produisent aussi bien à l'issue d'un épisode ponctuel de très fortes pluies qu'à l'issue de pluies d'un niveau moyen, mais ayant lieu sur une longue période, ou sur un sol déjà bien gorgé d'eau...

La théorie des valeurs extrêmes multivariée (voir par exemple Resnick (1987), Beirlant, Goegebeur, Segers et Teugels (2004) et De Haan et Ferreira (2006)) fournit le cadre probabiliste et statistique permettant de modéliser asymptotiquement de manière adéquate les maxima composante par composante $\left(\max_{i=1,\cdots,n} X_1^{(i)}, \ldots, \max_{i=1,\cdots,n} X_d^{(i)}\right)$ d'un vecteur aléatoire $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_d)$. La dépendance extrémale de ce vecteur peut être caractérisée (Huang (1992)) par la fonction de dépendance caudale $\ell$, et la copule limite des maxima s'exprime quand $n \to \infty$ via

$$C(\boldsymbol{u}) = C_\ell(\boldsymbol{u}) = \exp[-\ell\{-\log(u_1), \ldots, -\log(u_d)\}] \ ,$$

pour tout $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots u_d) \in [0,1]^d$. Dans le cas multivarié où une dépendance asymptotique est réaliste, un modèle flexible pouvant à la fois prendre en compte les régimes extrême et intermédiaire est la classe des copules Archimax, proposée initialement par Capéraà, Fougères et Genest (2000) dans le cas bivarié et étendu en dimension quelconque par Mesiar et Jágr (2013) et Charpentier, Fougères, Genest et Nešlehová (2014). Ces dernières copules sont de la forme, pour tout $\boldsymbol{u} \in [0,1]^d$,

$$C_{\psi,\ell}(\boldsymbol{u}) = \psi[\ell\{\phi(u_1), \ldots, \phi(u_d)\}], \tag{1}$$

où $\ell$ est une fonction de dépendance caudale $d$-dimensionnelle et $\psi : [0,\infty) \to [0,1]$ est un générateur Archimédien, i.e. une fonction continue décroissante telle que $\psi(0) = 1$, $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$, et strictement décroissante sur $[0, x_\psi)$, où $x_\psi = \inf\{x : \psi(x) = 0\}$. La fonction $\psi$ peut être interprétée comme une déformation de la structure de dépendance des extrêmes. En effet, si $\psi(x) = e^{-x}$, alors $C_{\psi,\ell} = C_\ell$ est une copule de valeurs extrêmes ; de plus $C_{\psi,\ell}$ est dans le domaine d'attraction de $C_\ell$ sous des conditions adéquates (Capéraà *et coll.* (2000), Charpentier *et coll.* (2014).

L'objet de l'exposé est de présenter les résultats obtenus dans le récent travail de Chatelain, Fougères et Nešlehová (2019), où le problème de l'inférence dans la famille des copules Archimax est traité en toute généralité. Nous y proposons une approche semi-paramétrique, dans laquelle $\ell$ est estimée non paramétriquement, et où $\psi$ est supposée appartenir à une classe paramétrique $\Psi = \{\psi_\theta, \theta \in \mathcal{O}\}$. Cette approche assure l'identifiabilité de $\ell$ et $\theta$ sous de faibles conditions sur $\Psi$.

Les deux estimateurs de $\ell$ développés étendent respectivement les travaux de Pickands (1981) et Capéraà, Fougères et Genest (1997) ; formulés de manière équivalente en terme de fonction de dépendance de Pickands et notés ici $A_n^{\mathrm{CFG}}$ et $A_n^{\mathrm{P}}$, ils convergent faiblement vers un processus Gaussien centré, sous certaines conditions de régularité sur $\ell$ et $\psi$, comme spécifié dans les grandes lignes ci-dessous pour l'un des processus, noté $\mathbb{A}_n^{\mathrm{CFG}} = \sqrt{n}\left(A_n^{\mathrm{CFG}} - A\right)$. Les détails de définition des estimateurs proposés et des processus limites obtenus seront exposés lors de la présentation orale, ainsi que les hypothèses de régularité requises. Dans ce qui suit, on note $\mathring{\Delta}_d$ l'intérieur du simplexe unité $\mathring{\Delta}_d = \{\boldsymbol{w} \in [0,1]^d : w_1 + \cdots + w_d = 1, w_{(1)} > 0\}$, où $w_{(1)} = \min(w_1, \ldots, w_d)$. Pour tout sous-ensemble compact $\mathcal{K}$ de $\mathring{\Delta}_d$, $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathcal{K}$, muni de la norme sup.

**Théorème :** Supposons que $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ est un processus stationnaire, alpha-mélangeant avec $\alpha^{[\boldsymbol{X}]}(k) = O(a^k)$, quand $k \to \infty$, pour un certain $a \in (0,1)$. Supposons que les lois marginales sont continues, et que la copule sous-jacente aux observations $C = C_{\psi,\ell} = C_{\psi,A}$ est une copule Archimax de générateur $\psi$ $q$-monotone pour un certain $q \geq 3$ et tel que $\psi''$ existe et est continue sur $(0,\infty)$. Sous certaines hypothèses de régularité sur $\ell$ et $\psi$, pour tout ensemble compact $\mathcal{K} \subset \mathring{\Delta}_d$, $\mathbb{A}_n^{\mathrm{CFG}} \rightsquigarrow \mathbb{A}^{\mathrm{CFG}}$ quand $n \to \infty$ dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$, où pour tout $\boldsymbol{w} \in \mathring{\Delta}_d$,

$$\mathbb{A}^{\mathrm{CFG}}(\boldsymbol{w}) = A(\boldsymbol{w}) \int_0^1 \mathbb{C}[\psi\{-\boldsymbol{w}\log(u)\}] \, \frac{du}{u \log u}.$$

La convergence faible de $\mathbb{A}_n^{\mathrm{CFG}}$ et de $\mathbb{A}_n^{\mathrm{P}}$ s'obtient en utilisant les résultats de convergence faible du processus de la copule empirique obtenus pour des métriques pondérées par Berghaus, Bücher et Volgushev (2017). Nous étendons de plus ce résultat de convergence au cas où le générateur $\psi$ est préalablement estimé, sous hypothèse d'appartenance à une famille paramétrique.

Nous examinerons finalement les performances des différents estimateurs proposés pour de petites tailles d'échantillon, et présenterons une analyse de données de maxima mensuels de pluie en trois stations de Bretagne, exhibant une excellente adéquation du modèle Archimax avec générateur de Clayton, y compris dans les queues inférieure ou supérieure.

# Bibliographie

Beirlant, J., Goegebeur, U., Segers, J. et Teugels, J. L. (2004), *Statistics of Extremes: Theory and Applications*, Wiley.

Berghaus, B., Bücher, A. et Volgushev, S. (2017). Weak convergence of the empirical copula process with respect to weighted metrics. *Bernoulli*, 23, pp. 743-772.

Capéraà, Ph., Fougères, A.-L. et Genest, Ch. (1997). A nonparametric estimation procedure for bivariate extreme value copulas, *Biometrika*, 84, pp. 567-577.

Capéraà, Ph., Fougères, A.-L. et Genest, Ch. (2000). Bivariate distributions with given extreme value attractor, *Journal of Multivariate Analysis*, 72, pp. 30-49.

Charpentier, A., Fougères, A.-L., Genest, Ch. et Nešlehová, J. G (2014). Multivariate Archimax copulas, *Journal of Multivariate Analysis*, 126, pp. 118-136.

Chatelain, S., Fougères, A.-L. et Nešlehová, J. G (2019). Inference for Archimax copulas. *Annals of Statistics*, à paraître. Disponible sur le site de l'IMS :
https://www.imstat.org/journals-and-publications/annals-of-statistics/annals-of-statistics-future-papers/, ou via *<hal-01816050> ; https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01816050.*

De Haan, L. et Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory*, Springer.

Huang, X. (1992). Statistics of bivariate extreme values, *Thesis (Ph.D.) – Erasmus University Rotterdam, Tinbergen Institute Research* Series 22.

Mesiar, R. et Jágr, V. (2013). $d$-dimensional dependence functions and Archimax copulas, *Fuzzy Sets and Systems*, 228, pp. 78-87.

Pickands, III, J. (1981). Multivariate extreme value distributions, *Proceedings of the 43rd session of the International Statistical Institute, Vol. 2 (Buenos Aires, 1981), Bull. Inst. Internat. Statist.*, 49, pp. 859-878, 894-902.

Resnick, S.I. (1987). *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, Springer.