Application de la théorie des valeurs extrêmes et d'une approche par méta-modélisation adaptative à un problème d'optimisation sous contraintes probabilistes

Alexis Cousin [1] & Josselin Garnier [2] & Martin Guiton [3] & Miguel Munoz Zuniga [1]

[1] *IFP Energies nouvelles, 1-4 avenue de Bois-Préau, 92500 Rueil-Malmaison, France (alexis.cousin@ifpen.fr, miguel.munoz-zuniga@ifpen.fr)*
[2] *CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex (josselin.garnier@polytechnique.edu)*
[3] *IFP Energies nouvelles, établissement de Lyon, Rond-point de l'échangeur de Solaize, 69360 Solaize (martin.guiton@ifpen.fr)*

Résumé. Nous nous intéressons à la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes probabilistes. La fonction déterministe à minimiser est linéaire et les contraintes s'expriment sous la forme de probabilités de dépassements de seuils. Ces probabilités doivent rester très faibles ce qui entraîne des efforts de calcul importants. Nous nous servirons de résultats de la théorie des valeurs extrêmes, de méta-modèles et de méthodes de Monte Carlo accélérées afin d'estimer ces probabilités avec précision, en temps raisonnable et avec une intégration pertinente dans la boucle d'optimisation. Nous appliquerons ces outils à un cas académique qui nous permettra de comparer cette approche à des méthodes existantes.

Mots-clés. Optimisation, Fiabilité, Événement rare, Méta-modèle, Théorie des valeurs extrêmes.

Abstract. We consider an optimization problem under probabilistic constraints. The deterministic function to be minimized is linear and the constraints are expressed in the form of probabilities for exceeding thresholds. These probabilities must remain very low, which leads to significant computation efforts. We will use results from the extreme value theory, meta-models and accelerated Monte Carlo methods to estimate these probabilities accurately, in reasonable time and with a relevant integration in the optimization loop. We will apply these tools to an academic case that will allow us to compare this approach with existing methods.

Keywords. Optimization, Reliability, Rare event, Metamodel, Extreme Value Theory.

1 Introduction

Dans le contexte de la transition énergétique, les éoliennes offshore flottantes présentent de nombreux avantages (étendue de la zone d'exploitation, vent plus fort et plus régulier). Afin d'exploiter le potentiel de ces systèmes éoliens (flotteur, système d'ancrage et turbine), il est essentiel de minimiser leur coût de fabrication tout en garantissant leur fiabilité. Ces structures sont soumises à plusieurs incertitudes portant sur les conditions environnementales, sur des propriétés du modèle et des matériaux (notamment en fatigue). Ces incertitudes doivent être prises en compte pour obtenir un design optimal robuste.
Le problème d'optimisation devient donc un problème avec des contraintes en probabilité. Hormis le choix important de la méthode d'optimisation, la difficulté provient du besoin d'estimer

des probabilités à chaque itération de la boucle d'optimisation. Cette étape est d'autant plus coûteuse qu'elle occasionne l'appel à des codes de calcul lourds permettant l'estimation, entre autre, de la fatigue du matériel. De plus, la probabilité de défaillance de la structure doit rester très faible, ce qui ajoute une difficulté supplémentaire. Il est alors nécessaire de déterminer des méthodes astucieuses pour limiter le nombre d'appels au code tout en vérifiant une certaine précision sur le calcul des probabilités.
Nous présentons ici un cas académique reprenant les principales caractéristiques du problème mentionné ci-dessus (en ce qui concerne le nombre et le type des contraintes, des sources d'incertitudes et les propriétés de la fonction à minimiser). Cet exemple nous permettra de présenter une méthodologie prenant en compte la nature de chaque contrainte. Nous mettrons en évidence l'intérêt de différents outils : la théorie des valeurs extrêmes, les méta-modèles et les méthodes de Monte Carlo accélérées, en comparant notre approche aux méthodes existantes.

2 Présentation du cas académique

Le cas académique repose sur l'étude d'un oscillateur harmonique amorti forcé (par exemple l'étude du déplacement d'une masse au bout d'un ressort au cours d'un période d'observation $[0,T]$). Les variables de design sont la masse de l'objet x_1 et la constante de raideur du ressort x_2. Une incertitude est associée à ces variables, respectivement ξ_1 et ξ_3 ainsi qu'à la constante d'amortissement (ξ_2). Ces variables influencent le mouvement de l'objet et doivent respecter trois contraintes pour être acceptables. Une première contrainte porte sur l'accumulation des instants où l'accélération dépasse un certain seuil ρ sur toute la période d'observation; cette quantité devant être inférieure à ξ_4 pour être acceptable. De plus, des contraintes g_2 et g_3 imposent une limite à la vitesse et à l'accélération de l'objet en chaque instant. L'excitation extérieure z imposée à l'oscillateur est aléatoire. Enfin, la fonction f à minimiser est simplement une fonction linéaire de x_1 et x_2. Formulons mathématiquement ce problème.

Soit la fonction objectif f à valeurs réelles définie de la façon suivante :

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \Omega = [1,10] \times [20,80] & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 - 10x_1 \end{array}$$

Soient g_i $(i = 1,2,3)$ les trois fonctions contraintes du problème d'optimisation qui à $(x,\xi;z)$ associent les variables aléatoires $g_i(x,\xi;z)$ avec :

- x vecteur de $\mathbb{R}^2$;
- $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_5,\xi_6)$ vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^6$;
- z processus aléatoire tel que, $\forall t \in [0,T]$, $z(t)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le processus z est gaussien, stationnaire, ergodique, de moyenne nulle et de fonction de covariance k_z.

De plus, ξ et z sont indépendants ainsi que les $\xi_i, i = 1,...,6$ entre eux.

Les fonctions g_i s'expriment comme suit :

$$g_1(x,\xi;z) = \int_0^T (|y''(t,x,\xi;z)| - \rho)^+ dt - \xi_4$$

$$g_2(x,\xi;z) = \max_{[0,T]} y''(t,x,\xi;z) - \xi_5$$

$$g_3(x,\xi;z) = \max_{[0,T]} y'(t,x,\xi;z) - \xi_6$$

où y solution de l'équation d'un oscillateur harmonique stochastique :

$$my'' + cy' + ky = z$$

et

$$m = x_1 + \xi_1,\ c = 1 + \xi_2,\ k = x_2 + \xi_3.$$

Nous précisons que pour tout réel u, $(|u| - \rho)^+$ est la partie positive de $(|u| - \rho)$ où ρ est une constante et que les fonctions y' et y'' représentent respectivement la dérivée et la dérivée seconde de y par rapport à t.

Au final, le problème d'optimisation étudié consiste à minimiser f sur Ω en respectant des contraintes de type probabiliste sur g_i,$(i = 1, 2, 3)$ et s'écrit :

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\Omega} \quad & f(x) & \\
\text{s.c} \quad & \mathbb{P}_{\xi,z}(g_1(x,\xi;z) > 0) < 10^{-4} & (1)\\
& \mathbb{P}_{\xi,z}(g_2(x,\xi;z) > 0) < 10^{-4} & (2)\\
& \mathbb{P}_{\xi,z}(g_3(x,\xi;z) > 0) < 10^{-4} & (3)
\end{aligned}$$

Soulignons les analogies entre ce cas académique et le problème du dimensionnement en fatigue d'une éolienne flottante:

- z est l'analogue de la variation d'élévation de houle et de la vitesse de vent ;
- ξ représente les incertitudes du modèle ;
- g_2 et g_3 sont des limites en effort et en mouvement ;
- g_1 est un cumul temporel comme le dommage.

Notons également que l'équation différentielle est un analogue simplifié du problème hydrodynamique non-linéaire (notamment en raison des interactions hydrodynamiques).

3 Reformulation du problème d'optimisation

L'ergodicité de z nous permet de simplifier par approximation la contrainte (1) sur g_1 et la théorie des valeurs extrêmes, les contraintes (2) et (3) sur g_2 et g_3. Nous aboutissons alors au problème d'optimisation suivant :

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{x\in\Omega} & f(x) & \\
\text{s.c} & \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}\left[F_4\left(Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right)\right] & < 10^{-4} \\
& \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_5}\left[1-\exp\left(-e^{a_T\left(b_T-\frac{\xi_5}{\sigma_{y''}}\right)}\right)\right] & < 10^{-4} \\
& \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_6}\left[1-\exp\left(-e^{c_T\left(d_T-\frac{\xi_6}{\sigma_{y'}}\right)}\right)\right] & < 10^{-4}
\end{array}
$$

où b_T,d_T, $\sigma_{y''}$ et $\sigma_{y'}$ dépendent de x, ξ_1, ξ_2 et ξ_3 de manière explicite, F_4 est la fonction de répartition de ξ_4 et Q est l'intégrale d'une fonction explicite définie ci-dessous. a_T et c_T dépendent uniquement de T.

Les sections suivantes reprennent les grandes lignes permettant d'aboutir à cette formulation.

3.1 Propriétés de y et de ses dérivées en temps

Nous faisons remarquer que y est la sortie d'un filtre linéaire. D'une part, cela implique que y' et y'' héritent des propriétés d'ergodicité, de stationnarité, de l'aspect gaussien et de la moyenne nulle de z. De plus, les fonctions de covariance de y' et y'' sont connues et dépendent de k_z, x, ξ_1, ξ_2 et ξ_3.
Ces propriétés vont nous permettre d'utiliser l'hypothèse d'ergodicité et la théorie des valeurs extrêmes pour approcher $\mathbb{P}_{z|\xi}(g_i(x, \xi; z) > 0)$.

3.2 Utilisation de l'hypothèse d'ergodicité

La probabilité apparaissant dans la première contrainte (1) peut se réécrire par conditionnement comme : $\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{P}_{z|\xi}(g_1(x, \xi; z) > 0)\right]$. Fixons ξ et concentrons nous sur $\mathbb{P}_{z|\xi}(g_1(x, \xi; z) > 0)$.

On note $G(u) = (|u| - \rho)^+$. Grâce à l'ergodicité de y'', nous pouvons réaliser l'approximation suivante :

$$\mathbb{P}_{z|\xi}(g_1(x, \xi; z) > 0) \simeq \mathbb{1}_{Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3)>\xi_4}(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

avec $Q(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = T \int_{\mathbb{R}} G(u) f_{y''(t)}(u)du$ et $f_{y''(t)}$ la densité de la variable aléatoire $y''(t)$. Par ailleurs, $y''(t)$ suit une loi normale centrée et de variance $\sigma^2_{y''}$, calculée à partir de la fonction d'autocovariance $k_{y''}$. La densité $f_{y''(t)}$ dépend donc de x, ξ_1, ξ_2, ξ_3 (voir section 3.1) et son évaluation nécessite le calcul de $\sigma^2_{y''}$ par intégration numérique.

On déduit de l'indépendance des $\xi_i, i = 1, ..., 4$:

$$\mathbb{P}_{\xi,z}(g_1(x, \xi; z) > 0) \simeq \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}[F_4(Q(x, \xi_1, \xi_2, \xi_3)]$$

où F_4 est la fonction de répartition de ξ_4.

3.3 Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes

La probabilité apparaissant dans la seconde contrainte (2) peut se réécrire par conditionnement comme : $\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{P}_{z|\xi}(g_2(x,\xi;z)>0)\right]$. Afin d'évaluer $\mathbb{P}_{z|\xi}(g_2(x,\xi;z)>0)$, nous appliquons un résultat bien connu de la théorie des valeurs extrêmes [1] sur le maximum de processus gaussien normalisé et stationnaire. Pour T assez grand, nous avons alors l'approximation :

$$\mathbb{P}_{z|\xi}(\max_{[0,T]} y''(t,x,\xi;z)-\xi_5>0) \simeq 1-\exp(-e^{a_T(b_T-\frac{\xi_5}{\sigma_{y''}})})$$

avec $\sigma_{y''}$, l'écart type de $y''(t)$ calculé pour la contrainte de la section 3.2, a_T dépendant uniquement de T et b_T dépendant de T et du second moment spectral de $\frac{y''}{\sigma_{y''}}$. Celui-ci est calculé grâce à la fonction d'autocovariance de y'' et dépend donc de x,ξ_1,ξ_2 et ξ_3. Il est le résultat d'une intégration 1D approchée par une méthode de quadrature.

La probabilité intervenant dans la contrainte (2) s'écrit donc :

$$\mathbb{P}_{\xi,z}(\max_{[0,T]} y''(t,x,\xi;z)-\xi_5>0) \simeq \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_5}[1-\exp(-e^{a_T(b_T-\frac{\xi_5}{\sigma_{y''}})})]$$

La contrainte (3) est traitée de façon équivalente et on écrit :

$$\mathbb{P}_{\xi,z}(\max_{[0,T]} y'(t,x,\xi;z)-\xi_6>0) \simeq \mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_6}[1-\exp(-e^{c_T(d_T-\frac{\xi_6}{\sigma_{y'}})})]$$

Similairement au cas de la contrainte (2), la troisième contrainte nécessite le calcul de $\sigma_{y'}$ et du second moment spectral de $\frac{y'}{\sigma_{y'}}$; ceux-ci sont approchés par des méthodes de quadrature 1D.

4 Résolution du problème d'optimisation avec méta-modélisation des contraintes

Nous rappelons que le calcul de f ne présente pas de problème (f est linéaire). La difficulté réside donc dans l'estimation des contraintes probabilistes. Une méthode classique de Monte Carlo est proscrite car impose un nombre d'évaluations des contraintes trop important, particulièrement pour le calcul de probabilité d'évènement rare et, dans le cas du problème industriel visé, lorsqu'une seule évaluation des fonctions g_i est coûteuse.
Bien que l'évaluation de g_1 soit rapide dans le cas académique, nous utiliserons une approximation à l'aide d'un méta-modèle afin d'estimer la probabilité de défaillance. Cela permettra de juger l'intérêt de la démarche avant de l'appliquer au cas industriel. En parallèle, le problème académique sera résolu par Monte Carlo intensif afin de servir de référence.
Deux approches par méta-modélisation sont alors possibles :

- construire le méta-modèle ϕ qui à x renvoie une approximation de $\log\left(\mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}[F_4(Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3)]\right)$. La première contrainte devient alors déterministe et s'écrit : $\phi(x)<\log(10^{-4})$;
- construire le méta-modèle ψ qui à (x,ξ_1,ξ_2,ξ_3) renvoie une approximation de $F_4(Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3))$ (ou de $Q(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3)$). La contrainte s'écrit alors $\mathbb{E}_{\xi_1,\xi_2,\xi_3}[\psi(x,\xi_1,\xi_2,\xi_3)]<10^{-4}$. Le calcul de l'espérance est ainsi rapide car la fonction ψ est peu coûteuse.

Différents méta-modèles sont envisageables, nous nous focaliserons sur les approches par processus gaussien (méthode de krigeage) et polynômes de chaos. La première est intéressante pour l'enrichissement du méta-modèle car elle permet une quantification fine des points où l'incertitude du modèle est forte. La seconde ne présente pas cet avantage mais évite l'hypothèse de stationnarité du krigeage. On pourra lire [2] pour une application de la première méthode et [3, 4] qui présentent la résolution de problèmes d'optimisation avec contraintes probabilistes grâce à différents méta-modèles adaptatifs.

D'autres méthodes, dites fiabilistes (FORM, SORM) existent pour traiter des probabilités d'événement rare. Elles reposent sur la résolution d'un algorithme d'optimisation permettant d'identifier le point de conception qui minimise la distance dans l'espace standard, entre l'origine et un état limite supposé linéaire ou quadratique. Avec ces approches, notre problème d'optimisation initial devient un problème d'optimisation à double boucle. Plusieurs approches (SORA[5] et SAP [6]) se penchent sur cet aspect afin de résoudre le problème en une simple boucle. Cependant, malgré le temps de calcul réduit que demandent ces méthodes, elles peuvent mener à des estimations incorrectes de nos contraintes (dues à des hypothèses sur les contraintes qui ne sont pas vérifiées).
Nous éviterons ces hypothèses en nous reposant sur les méta-modèles introduits qui seront couplés à des méthodes de Monte Carlo accélérées [7]. Nous comparerons les résultats de notre méthodologie avec ceux obtenus à partir des méthodes reposant sur les méthodes fiabilistes.

Bibliographie

[1] M.R. Leadbetter, G. Lindgren, and H. Rootzén. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer series in statistics. Springer-Verlag, 1983.

[2] Q. Huchet, C. Mattrand, P. Beaurepaire, N. Relun, and N. Gayton. AK-DA: An efficient method for the fatigue assessment of wind turbine structures. *Wind Energy*, 2019.

[3] V. Dubourg. *Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization*. PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 2011.

[4] M. Moustapha and B. Sudret. Surrogate-assisted reliability-based design optimization: a survey and a new general framework. *arXiv e-prints*, page arXiv:1901.03311, 2019.

[5] X. Du and W. Chen. Sequential Optimization and Reliability Assessment method for Efficient Probabilistic Design. *ASME J. Mech. Des.*, 126(2):225–233, 2004.

[6] G.D. Cheng, L. Xu, and L. Jiang. Sequential approximate programming strategy for reliability-based optimization. *Computers and Structures*, 84(21):1353–67, 2006.

[7] J. Barrera, T. Homem-De-Mello, E. Moreno, B. K. Pagnoncelli, and G. Canessa. Chance-constrained Problems and Rare Events: An Importance Sampling Approach. *Math. Program.*, 157(1):153–189, 2016.